

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, BAND 19, HEFT 3, FEBRUAR 1934

Über die an der Oberfläche einer Flüssigkeit schwingende Platte

Von August Dimpker

(Mit 6 Figuren)

1. Einleitung

Die zum Verständnis dieser Arbeit nötigen Voraussetzungen über Oberflächenwellen findet man in dem bekannten Buche von Lamb.¹⁾ Wir wollen uns auf Fälle beschränken, bei denen die Wellenausbildung in nur zwei Dimensionen vor sich geht und zwar in der horizontalen x -Richtung und in der vertikalen y -Richtung. Der Koordinatenursprung liege in der ungestörten Oberfläche und die y -Achse werde positiv nach oben gerechnet. Wir setzen immer reibunglose volumbeständige Flüssigkeitsbewegungen voraus und betrachten nur Schwingungen von unendlich kleiner Amplitude, so daß in den auftretenden hydrodynamischen Gleichungen die quadratischen Geschwindigkeitsglieder zu vernachlässigen sind. Ferner nehmen wir an, daß die Flüssigkeit unendlich tief sei. Nur die Wirkung der Erdschwere soll berücksichtigt werden. Die bei sehr kleinen Wellenlängen auftretende Wirkung der Kapillarspannung bleibt unberücksichtigt.

2. Berechnung der Wellenbewegung bei einer anfänglichen Erhebung der Oberfläche der Flüssigkeit

Die Theorie der Wellen, die auf tiefem Wasser durch eine lokale Oberflächenstörung erzeugt werden, wurde zuerst von Cauchy²⁾ und Poisson³⁾ untersucht. Eine einfache Darstellung ihrer Rechnungen findet man bei Lamb.⁴⁾ Ihre

1) Horace Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. 2. deutsche Auflage nach der 5. englischen besorgt von Elise Helly, 1931, Teubner, Leipzig-Berlin. S. 405ff.

2) Cauchy, Mémoires sur la Theorie des Ondes, Mémoires de l'Academie royal des Sciences. I. 1827.

3) Poisson, Mémoires sur la Theorie des Ondes, Mémoires de l'Academie royal des Sciences. I. 1816.

4) Vgl. Fußnote 1) S. 430ff.

Resultate sollen hier nach einer anderen Methode abgeleitet werden, um an einem bereits gelösten Problem die Brauchbarkeit dieser Methode zu erweisen.

Das Problem erscheint naturgemäß in zwei Formen. Wir können von einer anfänglichen Erhebung der freien Oberfläche ohne Anfangsgeschwindigkeit oder aber auch von einer ungestörten Oberfläche und einer Anfangsverteilung von impulsiven Oberflächendrückchen ausgehen.

Wir betrachten den ersten Fall und nehmen an, daß die Anfangserhebung nur auf die unmittelbare Nähe des Ursprungs beschränkt ist, und zwar so, daß sie überall Null ist, nur im Nullpunkt so unendlich wird, daß das Integral

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha = 1$$

wird.

Eine Funktion $f(x)$ läßt sich unter bestimmten hier erfüllten Bedingungen nach dem Fourierschen Integraltheorem in folgende Form entwickeln:

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{p(x-\alpha)} dp d\alpha.$$

Hierbei ist p eine rein imaginäre und α eine rein reelle Integrationsvariable.

Da die anfänglich gegebene Oberfläche, die wir nach diesem Theorem entwickeln wollen, in der oben angegebenen einfachen Form gegeben ist, so vereinfacht sich (2) zu

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} dp.$$

Dieses Integral hat im allgemeinen keinen vernünftigen Sinn. Erst durch den vorher angegebenen Grenzübergang erhält es eine bestimmte Bedeutung.

Wir rechnen zunächst mit nur einem Element des Fourier-integrales und setzen das Potential unserer Wellenbewegung an zu

$$(4) \quad \Phi^* = e^{px} f(y) h(t),$$

wobei $f(y)$ und $h(t)$ noch zu bestimmende Funktionen sind. Der Stern soll andeuten, daß bisher nur ein Glied des Fourier-integrals berücksichtigt worden ist. Daß wir das Potential Φ^* in dieser speziellen Gestalt ansetzen, ist keine Einschränkung,

denn durch die Verallgemeinerung mittels des Fourierintegrales kann noch jede Funktion erhalten werden.

Mit diesem Potential erfüllen wir alle unsere Randbedingungen. Dann muß das durch die Verallgemeinerung (3) gewonnene Resultat auch alle Randbedingungen erfüllen. Das Potential muß der Potentialgleichung

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

genügen, also

$$p^2 f(y) + f''(y) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch:

$$f(y) = A e^{i p y} + B e^{-i p y}.$$

Da wir unendlich tiefes Wasser voraussetzen, darf für $y = -\infty$ keine Vertikalgeschwindigkeit vorhanden sein. Es muß also gelten:

$$(6) \quad \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \right)_{y=-\infty} = 0.$$

Unter Berücksichtigung dieser Bedingung ergibt sich

$$(7) \quad f(y) = C e^{|p| y}.$$

Die noch unbestimmte Funktion $h(t)$ bestimmt man aus der Oberflächenbedingung

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial P^*}{\partial t} = 0.$$

Hierin ist ϱ die Dichte und P der Druck. Der Index soll andeuten, daß alle Werte für $y = 0$ zu nehmen sind. Ist keine Anfangsdruckverteilung vorgeschrieben, so vereinfacht sich (8) zu

$$(8a) \quad \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} = 0.$$

Wir erhalten also für $h(t)$ die Differentialgleichung:

$$\ddot{h}(t) + g |p| h(t) = 0.$$

Als Lösung ergibt sich

$$h(t) = A e^{i \sqrt{g |p|} t} + B e^{-i \sqrt{g |p|} t},$$

wobei A und B noch zu bestimmende Konstanten sind. Für das Potential erhalten wir dann

$$(4a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi^* = C e^{i p |y|} \{ A e^{i \sqrt{g |p|} t} + B e^{-i \sqrt{g |p|} t} \} \\ = e^{i p |y|} \{ A_1 \cos \sqrt{g |p|} t + B_1 \sin \sqrt{g |p|} t \}. \end{array} \right.$$

Hieraus können wir die Oberfläche berechnen zu

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta^* = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right) = -\frac{1}{g} e^{px} \\ \quad \cdot \{-A_1 \sqrt{g|p|} \sin \sqrt{g|p|} t + B_1 \sqrt{g|p|} \cos \sqrt{g|p|} t\} \end{array} \right.$$

und daraus

$$(10) \quad \frac{\partial \eta^*}{\partial t} = \frac{1}{g} e^{px} \{A_1 g|p| \cos \sqrt{g|p|} t + B_1 g|p| \sin \sqrt{g|p|} t\}.$$

Um die noch unbestimmten Konstanten A_1 und B_1 zu berechnen, müssen zwei Bedingungen gegeben sein. Wir wollen annehmen:

1. Zur Zeit $t = 0$ soll die Oberfläche die oben vorgeschriebene Gestalt haben:

$$(11) \quad \eta^*_{t=0} = e^{px}.$$

2. Zur Zeit $t = 0$ soll keine Geschwindigkeit vorhanden sein:

$$(12) \quad \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial t} \right)_{t=0} = 0.$$

Aus der letzten Bedingung ergibt sich

$$A_1 = 0$$

und aus der ersten

$$B_1 = -\frac{g}{\sqrt{g|p|}}.$$

Für die Oberfläche erhalten wir dann

$$(13) \quad \eta^* = e^{px} \cos \sqrt{g|p|} t.$$

Bisher wurde nur ein Element des Fourierintegrales berücksichtigt. Um die allgemeine Lösung zu erhalten, muß nach (3) verallgemeinert werden:

$$(14) \quad \eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{px} \cos \sqrt{g|p|} t \, dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{px} \cos c \sqrt{|p|} \, dp.$$

Die Integrationsvariable ist rein imaginär. Wir setzen

$$p = i \cdot q,$$

wobei q dann rein reell ist. Ist q negativ, so gilt

$$|p| = i \cdot p.$$

Ist q dagegen positiv, so gilt

$$|p| = -i \cdot p.$$

Die Mehrdeutigkeit der im Integranden vorkommenden Wurzel braucht nicht berücksichtigt zu werden, da der Kosinus eine gerade Funktion ist.

Das Integral (14) läßt sich in zwei Teilintegrale zerlegen, in denen der Absolutbetrag der Veränderlichen nicht mehr vorkommt:

$$\eta = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-i\infty}^0 e^{px} \cos c \sqrt{ip} dp + \int_0^{+i\infty} e^{px} \cos c \sqrt{-ip} dp \right\}.$$

Im ersten Teilintegral

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^0 e^{px} \cos c \sqrt{ip} dp$$

führt man als neue Unbekannte

$$q = i \cdot p$$

ein, wobei q wieder rein reell ist. Man erhält dann

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-iqx} \cos c \sqrt{q} dq.$$

Im zweiten Teilintegral

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+i\infty} e^{px} \cos c \sqrt{-ip} dp$$

erhält man durch Einführung der neuen Integrationsvariablen

$$q = -i \cdot p,$$

wobei q wieder rein reell wird,

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{iqx} \cos c \sqrt{q} dq.$$

Für die Oberfläche ergibt sich dann

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos q x \cos c \sqrt{q} dq.$$

Da q immer positiv ist, kann man als neue Veränderliche

$$q = r^2$$

einführen. Dann wird

$$\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r \cos x r^2 \cos c r dr.$$

Die Lösung dieses Integrales macht erhebliche Schwierigkeiten, während das Integral

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos r^2 x \sin cr dr$$

sich leicht lösen läßt.¹⁾

Durch unbestimmte Integration nach der Konstanten c kann das gesuchte Integral auf diese Form gebracht werden. Es ist:

$$\int \eta dc = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos r^2 x \sin cr dr.$$

Durch eine einfache goniometrische Umformung erhält man

$$\int \eta dc = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \sin(r^2 x + cr) dr - \int_0^\infty \sin(r^2 x - cr) dr \right\}.$$

Wir setzen

$$s = \sqrt{x} \left(r \pm \frac{c}{2x} \right)$$

und zwar soll für das erste Integral das positive und für das zweite das negative Vorzeichen gelten. Zur Abkürzung setzen wir:

$$a^2 = \frac{c^2}{4x}.$$

Dann wird

$$\int_0^\infty \sin(r^2 x + cr) dr = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_a^\infty \sin(s^2 - a^2) ds$$

und

$$\int_0^\infty \sin(r^2 x - cr) dr = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-a}^\infty \sin(s^2 - a^2) ds.$$

Hieraus ergibt sich

$$\int \eta dc = -\frac{2}{\pi \sqrt{x}} \int_0^a \sin(s^2 - a^2) ds.$$

Um die gesuchte Oberfläche zu erhalten, muß nach c differenziert werden:

$$\frac{d}{dc} \int_0^a \sin(s^2 - a^2) ds = \frac{d}{da} \left(\int_0^a \sin(s^2 - a^2) ds \right) \cdot \frac{da}{dc}.$$

1) Vgl. S. 225 Fußnote 1), S. 432.

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left(\int_0^a \sin(s^2 - a^2) ds \right) &= \int_0^a \frac{d}{da} \sin(s^2 - a^2) ds \\ &= - \int_0^a 2a \cos(s^2 - a^2) ds. \end{aligned}$$

Für die Oberfläche ergibt sich also

$$(15) \quad \eta = \frac{c}{\pi x^{5/4}} \int_0^a \cos(s^2 - a^2) ds.$$

Setzt man für c seinen Wert ein und formt ein wenig um, so wird

$$(15a) \quad \eta = \frac{\sqrt{g} t}{\pi \sqrt{x^8}} \left\{ \cos a^2 \int_0^a \cos s^2 ds + \sin a^2 \int_0^a \sin s^2 ds \right\}$$

in Übereinstimmung mit Resultaten von Cauchy und Poisson.

Um die gefundene Lösung mit Hilfe der Fresnelintegrale auszudrücken, setzen wir

$$s^2 = \frac{1}{2} \pi u^2$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^a \cos s^2 ds &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \cos \frac{\pi}{2} u^2 du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} C\left(a \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right), \\ \int_0^a \sin s^2 ds &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} S\left(a \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right), \end{aligned}$$

wobei C und S die bekannten Fresnelfunktionen sind.

Setzen wir noch für a seinen Wert ein, so gilt für die Oberfläche:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{\sqrt{g} t}{\sqrt{2} \pi x^5} \\ \cdot \left\{ \cos \frac{g t^2}{4x} C\left(\sqrt{\frac{g}{2\pi x}} t\right) + \sin \frac{g t^2}{4x} S\left(\sqrt{\frac{g}{2\pi x}} t\right) \right\} \end{array} \right.$$

Diese Lösung wird gelten, wenn x positiv ist, d. h. wenn nur in positiver x -Richtung Wellen fortfahren. Nun werden aber im allgemeinen auch nach der negativen Seite Wellen fortfahren. Dann werden wir nur die halbe Amplitude wie

in (16) bekommen. Damit die oben gefundene Lösung auch noch für negatives x gilt, muß man x durch $|x|$ ersetzen. Wir erhalten also für die nach beiden Seiten fortlaufende Welle

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{\sqrt{g} t}{\sqrt{8\pi|x|^3}} \\ \cdot \left\{ \cos \frac{gt^2}{4|x|} C\left(\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}} t\right) + \sin \frac{gt^2}{4|x|} S\left(\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}} t\right) \right\} \end{array} \right.$$

Die genaue Erörterung dieser Lösung wird bei Lamb gegeben.¹⁾

Ist zu Beginn der Bewegung eine Anfangsverteilung von impulsiven Oberflächendrücken gegeben, die nach der gleichen singulären Funktion verteilt sind wie oben die Oberfläche, so läßt sich eine ganz ähnliche Rechnung durchführen. Man kommt auch hier zu gleichen Resultaten wie Cauchy und Poisson.

3. Die periodisch belastete Linie, allgemeiner Fall

Bisher wurden zur Zeit $t = 0$ Zwangsbedingungen vorgegeben. Dann wurde das System sich selbst überlassen. Jetzt sollen Zwangsbedingungen vorgegeben werden, die als Funktion der Zeit dauernd wirken. Wir wollen die Wirkung eines periodischen Druckes auf die Wasseroberfläche betrachten.

Der Druck möge zunächst nur auf einer Linie, die parallel zur z -Achse durch den Ursprung läuft, wirken. Sowohl in der Wellenfortpflanzungsrichtung x als auch in der dazu senkrechten horizontalen Richtung z möge die Flüssigkeit unbegrenzt sein. Auch in diesem Fall soll die Flüssigkeit unendlich tief sein. Es muß wieder die Randbedingung (6) gelten.

Wir haben ein zweidimensionales Problem, denn in allen zu den x , y -Ebenen parallelen Ebenen werden die gleichen Erscheinungen hervorgerufen. Die Ergebnisse werden nicht von der Koordinate z abhängen.

Bei unendlich kleinen Wellenamplituden wird der Druck an der Oberfläche in erster Näherung nicht von y abhängen. Wir können ihn ansetzen zu

$$(18) \quad P_0 = f(x) \cos \omega t,$$

wobei ω die erzwungene Frequenz ist. Die Funktion $f(x)$ soll nach dem Fourierschen Integraltheorem entwickelt werden.

1) Horace Lamb, a. a. O.

Der Druck soll nur auf einer Linie durch den Ursprung wirken. Wenn wir voraussetzen, daß

$$(19) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha = 1$$

wird, so können wir wieder mit unserem vereinfachten Fourierintegral (3) rechnen. Der Druck an der Oberfläche wird dann:

$$(20) \quad P_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} d p \cdot \cos \omega t.$$

Auch hier wird die Rechnung zunächst mit nur einem Gliede des Fourierintegrals durchgeführt. Wir setzen also den Druck an der Oberfläche an zu:

$$(21) \quad P_0^* = e^{px} \cos \omega t.$$

Das Potential der Wellenbewegung wird angesetzt zu

$$(22) \quad \Phi^* = e^{px} f(y) h(t).$$

Aus der Potentialgleichung (5) und unter Berücksichtigung der Randbedingung (6) erhält man für die unbestimmte Funktion $f(y)$:

$$(23) \quad f(y) = C e^{|p| y}.$$

Da an der Oberfläche außer dem Atmosphärendruck noch eine vorgeschriebene Druckverteilung wirkt, muß man hier mit der allgemeinen Oberflächenbedingung (8) rechnen. Hier ergibt sich für $h(t)$:

$$C \ddot{h}(t) + C g |p| h(t) - \frac{\omega}{\varrho} \sin \omega t = 0.$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung erhält man

$$h(t) = A \sin \sqrt{g|p|} t + B \cos \sqrt{g|p|} t + \frac{\omega}{\varrho C(g|p| - \omega^2)} \sin \omega t;$$

denn

$$A \sin \sqrt{g|p|} t + B \cos \sqrt{g|p|} t$$

ist die allgemeine Lösung der homogenen und

$$\frac{\omega}{\varrho C(g|p| - \omega^2)} \sin \omega t$$

ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Wir erhalten also für das Potential:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi^* = C e^{px} e^{|p| y} \left(A \sin \sqrt{g|p|} t + B \cos \sqrt{g|p|} t \right. \\ \quad \left. + \frac{\omega}{\varrho C(g|p| - \omega^2)} \sin \omega t \right) \end{array} \right.$$

und daraus die Oberfläche

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \frac{P_0}{\varrho} \right) = \frac{C}{g} e^{px} \left(-A \sqrt{g|p|} \cos \sqrt{g|p|} t \right. \\ \quad \left. + B \sqrt{g|p|} \sin \sqrt{g|p|} t \right. \\ \quad \left. + \frac{\omega^2}{\varrho C(g|p| - \omega^2)} \cos \omega t \right) - \frac{e^{px}}{g \varrho} \cos \omega t. \end{array} \right.$$

Zur Zeit $t = 0$ soll die Flüssigkeitsoberfläche eben sein, d. h.

$$\eta_{t=0}^* = 0$$

und die vorgeschriebene Druckverteilung herrschen:

$$-(\varrho \Phi_0^*)_t = 0 = e^{px}.$$

Aus der zweiten Bedingung folgt

$$B = -\frac{1}{g \varrho}$$

und aus der ersten

$$A = -\frac{1}{C \varrho \sqrt{g|p|}} \left(\frac{\omega^2}{g|p| - \omega^2} + 1 \right).$$

Wir erhalten also für die Oberfläche

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta^* = \frac{1}{\varrho g} e^{px} \left\{ \left(\frac{\omega^2}{g|p| - \omega^2} + 1 \right) (\cos \sqrt{g|p|} t - \cos \omega t) \right. \\ \quad \left. - \sqrt{g|p|} \sin \sqrt{g|p|} t \right\}. \end{array} \right.$$

Dieser Ausdruck ist nach (3) zu verallgemeinern:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{1}{2 \pi i g \varrho} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \left\{ \left(\frac{\omega^2}{g|p| - \omega^2} + 1 \right) (\cos \sqrt{g|p|} t - \cos \omega t) \right. \\ \quad \left. - \sqrt{g|p|} \sin \sqrt{g|p|} t \right\} dp \end{array} \right.$$

oder

$$(27a) \quad \eta = \frac{1}{g \varrho} \{ \omega^2 J_4 + J_3 - \omega^2 J_2 \cos \omega t - J_1 \cos \omega t - \sqrt{g} J_5 \}$$

wenn man die einzelnen Integrale bezeichnet mit

$$(28) \quad J_1 = \frac{1}{2 \pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} dp,$$

$$(29) \quad J_2 = \frac{1}{2 \pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{px}}{g|p| - \omega^2} dp,$$

$$(30) \quad J_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \cos \sqrt{g|p|} t \, dp,$$

$$(31) \quad J_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{px}}{g|p| - \omega^2} \cos \sqrt{g|p|} t \, dp,$$

$$(32) \quad J_5 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \sqrt{|p|} e^{px} \sin \sqrt{g|p|} t \, dp.$$

Zunächst wird das Integral J_1 behandelt. Setzen wir x als positiv voraus, so können wir das Integral über die imaginäre Achse nach dem Cauchyschen Integralsatz der Funktionentheorie gleich dem Integral über den negativen Halbkreis im Unendlichen setzen. Da aber der Integrand wegen der in ihm vorkommenden Exponentialfunktion bedeutend schneller gegen Null geht, als der Integrationsweg gegen Unendlich, so wird dies Integral Null, da keine Pole im Innern des Integrationsgebietes liegen.

Die gleiche Rechnung kann man für negatives x durchführen, nur ist das Integral über den positiven unendlich fernen Halbkreis zu erstrecken.

Wird $x = 0$, so wird der Integrand nicht mit wachsendem p gegen Null gehen. Das Integral wird dann unendlich. Wir erhalten also

$$(28a) \quad J_1 = \begin{cases} 0 & \text{für } x > 0 \\ \infty & \text{„ } x = 0 \\ 0 & \text{„ } x < 0 \end{cases}$$

Das Integral J_2 läßt sich auf ähnliche Weise wie das Integral (14) lösen. Die Rechnung soll hier nicht durchgeführt werden. Man erhält:

$$(29a) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_2 = -\frac{1}{\pi g} \left\{ Ci\left(\frac{\omega^2}{g}|x|\right) \cos \frac{\omega^2}{g}|x| \right. \\ \quad \left. + \sin \frac{\omega^2}{g}|x| \left(Si\left(\frac{\omega^2}{g}|x|\right) + \frac{\pi}{2} \right) \right\}. \end{array} \right.$$

Es sei noch bemerkt, daß man das gleiche Resultat erhält, wenn man den Cauchyschen Integralsatz benutzt und berücksichtigt, daß auf dem Integrationsweg ein Pol liegt.

Das Integral J_3 wurde schon nach (14) und (17) berechnet zu

$$(30a) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_3 = \frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{2\pi|x|^3}} \left\{ C\left(t\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}}\right) \cos \frac{gt^2}{4|x|} \right. \\ \quad \left. + S\left(t\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}}\right) \sin \frac{gt^2}{4|x|} \right\}. \end{array} \right.$$

Die Berechnung des Integrales J_4 soll wieder ein wenig genauer durchgeführt werden. Man kann das Integral wieder in zwei Teilintegrale spalten, die den Absolutbetrag der Veränderlichen nicht mehr enthalten. Durch Einführung von geeigneten Veränderlichen kann man diese beiden Teilintegrale wieder zusammenfassen. Man erhält dann:

$$J_4 = \frac{1}{\pi g} \int_0^\infty \frac{\cos q x \cos c \sqrt{q}}{q - a^2} dq$$

wobei $a^2 = \frac{\omega^2}{g}$ gesetzt ist. Auch hier braucht auf die Mehrdeutigkeit der Wurzel keine Rücksicht genommen zu werden, da der Kosinus eine gerade Funktion ist. Als neue Veränderliche führen wir

$$s^2 = q$$

ein und erhalten

$$J_4 = \frac{2}{\pi g} \int_0^\infty \frac{\cos s^2 x \cos c s}{s^2 - a^2} s ds.$$

Führt man statt der Kreisfunktionen die imaginären Exponentialfunktionen ein, so ergibt sich

$$J_4 = \frac{1}{2\pi g} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{i(xs^2 + cs)}}{s^2 - a^2} s ds + \int_0^\infty \frac{e^{i(xs^2 - cs)}}{s^2 - a^2} s ds \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{e^{-i(xs^2 + cs)}}{s^2 - a^2} s ds + \int_0^\infty \frac{e^{-i(xs^2 - cs)}}{s^2 - a^2} s ds \right\}.$$

Wir behandeln zunächst das Integral

$$J_{4,1} = e^{-\frac{ic}{4x}} \int_0^\infty \frac{e^{i\left(s\sqrt{x} + \frac{c}{2\sqrt{x}}\right)^2}}{s^2 - a^2} s ds.$$

Als neue Veränderliche wird eingeführt:

$$s\sqrt{x} + \frac{c}{2\sqrt{x}} = v.$$

Damit geht unser Integral über in

$$J_{4,1} = e^{-i \frac{g t^2}{4x}} \int_{\frac{Vg t}{2\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{e^{iv^2} \left(v - \frac{\sqrt{g} t}{2\sqrt{x}} \right)}{v^2 - \frac{v \sqrt{g} t}{\sqrt{x}} + \frac{g t^2}{4x} - \frac{\omega^2}{g} x} dv.$$

Eine allgemeine Lösung dieses Integrales würde auf außerordentliche Schwierigkeiten stoßen. Wir wollen hier nur Fälle betrachten, wo t^2/x sehr klein ist, so daß im Nenner die beiden mittleren Glieder gegen die beiden anderen Glieder zu vernachlässigen sind. Es wird dann auch nur einen kleinen Fehler ausmachen, wenn man das Integral von 0 bis ∞ erstreckt. Man erhält unter diesen Voraussetzungen:

$$J_{4,1} = e^{-i \frac{g t^2}{4x}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{iv^2} \cdot v}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv - \frac{\sqrt{g} t}{2\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \frac{e^{iv^2}}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv \right\}.$$

Auf gleiche Weise erhält man für die anderen Integrale

$$J_{4,2} = e^{-i \frac{g t^2}{4x}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{iv^2} \cdot v}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv + \frac{\sqrt{g} t}{2\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \frac{e^{iv^2}}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv \right\},$$

$$J_{4,3} = e^{+i \frac{g t^2}{4x}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-iv^2} \cdot v}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv - \frac{\sqrt{g} t}{2\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iv^2}}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv \right\},$$

$$J_{4,4} = e^{+i \frac{g t^2}{4x}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-iv^2} \cdot v}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv + \frac{\sqrt{g} t}{2\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iv^2}}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv \right\}.$$

Wir erhalten also für J_4 :

$$J_4 = \frac{1}{\pi g} \left\{ e^{-i \frac{g t^2}{4x}} \int_0^{\infty} \frac{e^{iv^2} \cdot v}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv + e^{+i \frac{g t^2}{4x}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iv^2} \cdot v}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv \right\}.$$

Durch Einführung der Kreisfunktionen ergibt sich:

$$J_4 = \frac{2}{\pi g} \left\{ \cos \frac{g t^2}{4x} \int_0^\infty \frac{\cos v^2 \cdot v}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv - \sin \frac{g t^2}{4x} \int_0^\infty \frac{\sin v^2 \cdot v}{v^2 - \frac{\omega^2}{g} x} dv \right\}.$$

Führen wir in beiden Integralen

$$y = v^2$$

als neue Veränderliche ein, so wird

$$J_4 = \frac{1}{\pi g} \left\{ \cos \frac{g t^2}{4x} \int_0^\infty \frac{\cos y}{y - \frac{\omega^2}{g} x} dy - \sin \frac{g t^2}{4x} \int_0^\infty \frac{\sin y}{y - \frac{\omega^2}{g} x} dy \right\}.$$

Wenn wir beachten, daß zum Nullpunkt Symmetrie herrschen muß, so erhalten wir für kleines t^2/x :

$$(31a) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_4 = -\frac{1}{\pi g} \left\{ \cos \frac{g t^2}{4|x|} \left[Ci\left(\frac{\omega^2}{g} |x|\right) \cos \frac{\omega^2}{g} |x| \right. \right. \\ \quad + \sin \frac{\omega^2}{g} |x| \left(\frac{1}{2}\pi + Si\left(\frac{\omega^2}{g} |x|\right) \right) \\ \quad \left. \left. - \sin \frac{g t^2}{4|x|} \left[Ci\left(\frac{\omega^2}{g} |x|\right) \sin \frac{\omega^2}{g} |x| \right. \right. \\ \quad \left. \left. - \cos \frac{\omega^2}{g} |x| \left(\frac{1}{2}\pi + Si\left(\frac{\omega^2}{g} |x|\right) \right) \right] \right\}. \end{array} \right.$$

Das Integral J_5 läßt sich ebenso wie das Integral (14) lösen. Man erhält

$$(32a) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_5 = - \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi|x|^3}} \left\{ C\left(\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}} t\right) \cos \frac{g t^2}{4|x|} \right. \right. \\ \quad + S\left(\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}} t\right) \sin \frac{g t^2}{4|x|} \left. \right\} + \frac{\sqrt{g} t}{\pi \sqrt{|x|^3}} \\ \quad + \frac{g t^2}{\sqrt{8\pi|x|^5}} \left\{ S_i\left(\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}} t\right) \cos \frac{g t^2}{4|x|} \right. \\ \quad \left. \left. - C\left(\sqrt{\frac{g}{2\pi|x|}} t\right) \sin \frac{g t^2}{4|x|} \right\} \right]. \end{array} \right.$$

Unter den bei J_4 gemachten Voraussetzungen erhalten wir also für die Oberfläche

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \frac{1}{2g} \frac{k}{\pi} \left\{ Ci(k|x|) \cos k|x| \right. \\ \quad \left. + \left(\frac{1}{2}\pi + Si(k|x|) \right) \sin k|x| \right\} (\cos \omega t - 1), \end{array} \right.$$

wenn wir

(34)

$$\frac{\omega^2}{g} = k$$

setzen, da

$$\cos \frac{g t^2}{4x} = 1$$

und

$$\sin \frac{g t^2}{4x} = 0$$

ist.

Diese Formel wird nur für den allerersten Anfang gelten, da bald die vernachlässigten Glieder zu groß werden.

Im Nullpunkt kommt noch ein unendlich großes, bald positives, bald negatives Glied hinzu. Diese unendlich große Wellenamplitude ist nicht widersinnig, sondern durch unsere singulären Annahmen über die Druckverteilung bedingt.

4. Die periodisch belastete Linie, stationärer Fall

Unter einer stationären Wellenbewegung wollen wir diejenige Wellenbewegung verstehen, der sich bei einem Problem die Wellenbewegung mit der Zeit als Grenzwert nähert, die sich also einstellt, wenn wir den Grenzübergang t gegen ∞ versuchen.

Nicht alle Wellenbewegungen brauchen einen solchen Grenzwert zu besitzen. Im vorliegenden Falle wollen wir aber annehmen, daß eine stationäre Wellenbewegung besteht, wie sie auch das Experiment zeigt, und diese zu berechnen suchen.

Wir gehen von Gl. (24) aus und berücksichtigen nur die erzwungene Schwingung des allgemeinen Ansatzes, indem wir annehmen, daß die freie Schwingung durch die Dämpfung mit der Zeit abgeklungen sei.

Wir erhalten also für das Potential

$$(35) \quad \Phi^* = \frac{\omega}{\varrho(g|p| - \omega^2)} e^{px} e^{|p|y} \sin \omega t.$$

Aus (35) läßt sich die Oberfläche berechnen zu

$$(36) \quad \eta^* = \frac{1}{g\varrho} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - g|p|} - 1 \right) e^{px} \cos \omega t.$$

Dies Resultat muß nach (3) verallgemeinert werden. Wenn nach beiden Seiten symmetrisch Wellen fortlaufen, so wird

$$(37) \quad \eta = \frac{1}{2g\varrho} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\omega^2}{\omega^2 - g|p|} - 1 \right\} e^{px} dp \cdot \cos \omega t.$$

Die beiden hier vorkommenden Integrale haben wir bereits gelöst. Wir benutzten Gl. (14) und (28). Für alle Punkte der Oberfläche außer dem Nullpunkt gilt also

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{1}{2g\varrho} \frac{\omega^2}{g\pi} \left\{ \cos k|x| Ci k|x| \right. \\ \quad \left. + \sin k|x| \left(Si k|x| + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \cos \omega t. \end{array} \right.$$

Für großes x erhalten wir

$$(38a) \quad \eta_{x \rightarrow \infty} = \frac{k}{2g\varrho} \sin k|x| \cos \omega t.$$

Wir haben hier eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung gefunden. Sie stellt eine stehende Welle mit der Amplitude

$$a = \frac{k}{2g\varrho}$$

der Frequenz ω und der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

dar. Dies kann aber noch nicht die richtige Lösung sein, denn das Experiment lehrt uns, daß wir fordern müssen, daß sich im Unendlichen eine einfach harmonische fortlaufende Welle ausbilden muß, deren Bewegungsrichtung von der Störung weggeht.

Wir können aber zu der Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung superponieren, d. h. physikalisch: Wir dürfen der oben gefundenen Welle irgendwelche anderen Wellen überlagern, die an der ganzen Oberfläche der Oberflächenbedingung (8a) genügen.

Um unsere oben angegebene Bedingung für das Unendliche zu befriedigen, müssen wir eine stehende Welle von gleicher Amplitude und Wellenlänge überlagern, die um 90° phasenverschoben gegen die erste ist. Wir müssen also eine stehende Welle der Form:

$$(39) \quad \eta' = -\frac{k}{2g\varrho} \cos k|x| \sin \omega t$$

überlagern. Als endgültige Form für die Oberfläche erhalten wir dann:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{k}{2g\varrho} \left\{ \frac{1}{\pi} \left[\cos k|x| Ci k|x| \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \sin k|x| \left(Si k|x| + \frac{1}{2}\pi \right) \right] \cos \omega t - \cos k|x| \sin \omega t \right\}. \end{array} \right.$$

Für großes x ergibt sich

$$(41) \quad \eta_{x \rightarrow \infty} = \frac{k}{2g\rho} \sin(k|x| - \omega t).$$

Die Wellenamplitude wird also durch die Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmt, während sich eine fortlaufende Welle erst durch Überlagerung einer Lösung der homogenen Gleichung ergibt.

Um einen Überblick zu bekommen, wie weit die Lösung (41) noch gilt, ist in Fig. 1 die Funktion

$$F(x) = \cos x Ci x + \sin x (Si x + \frac{1}{2}\pi)$$

mit der Funktion

$$f(x) = \pi \sin x$$

verglichen worden. Auf der Ordinate ist $F(x)$ (ausgezogen) und $f(x)$ (gestrichelt) aufgetragen, während auf der Abszisse x aufgetragen ist. Die Näherungsformel wird gelten, solange

$$x > \frac{\lambda}{4}$$

ist. Der Fehler ist dann kleiner als 5%.

Die Näherungsformel gilt also bis sehr nahe an den Ursprung heran.

Um weitere Folgerungen aus diesen Formeln zu ziehen, muß Näheres über die Druckverteilung bekannt sein.

5. Deutung der aus 3. und 4. erhaltenen Resultate als Wellenbewegung einer an der Oberfläche der Flüssigkeit schwingenden Platte, wenn die Wellenlänge groß gegen den Plattenhalbmesser ist

Die im Abschnitt 3 und 4 erhaltenen Resultate lassen eine einfache Deutung zu. Bei einer endlichen Druckverteilung, deren Durchmesser klein gegen die Wellenlänge ist, treten im wesentlichen die gleichen Bewegungen auf, wie bei der belasteten Linie. Man muß nur das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha = B$$

über die Druckverteilung bilden und mit dieser Konstanten B die Resultate des 3. und 4. Abschnittes multiplizieren. Wir wollen jetzt das Wellenbild einer an der Oberfläche einer Flüssigkeit schwingenden Platte, deren Halbmesser klein gegen die auftretende Wellenlänge ist, zu berechnen suchen.

Für eine ganz unter Wasser schwingende Platte erhält man bei unendlich kleinen Schwingungsamplituden die Druckverteilung:

$$(42) \quad p_0 = -\varrho A \omega^2 \sqrt{R^2 - x^2} \cos \omega t.$$

Da aber am Ende der Platte ($x = \pm R, i$) dauernd der Druck Null wirkt, so kann man sich hier die freie Oberfläche angreifen denken. Wir können in Näherung mit der Druckverteilung (42) rechnen. An der Platte sei $x = \alpha$. Es wird

$$f(\alpha) = -\varrho A \omega^2 \sqrt{R^2 - \alpha^2}.$$

Also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha = -\varrho A \omega^2 \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - \alpha^2} d\alpha = -\frac{\varrho A \omega^2 \pi R^2}{2}.$$

Daraus ergibt sich

$$(43) \quad B = -\frac{\varrho A \omega^2 R^2 \pi}{2} = -\frac{\varrho A k R^2 \pi g}{2}.$$

Für eine unter den oben gestellten Bedingungen schwingende Platte an der Oberfläche der Flüssigkeit kann also der *Beginn* der Bewegung dargestellt werden nach (33) durch

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = -\frac{A k R^2 \pi}{4} \left[\frac{k}{\pi} \left\{ Ci k|x| \cos k|x| \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{2} \pi + Si k|x| \right) \sin k|x| \right\} (\cos \omega t - 1) \right]. \end{array} \right.$$

Führen wir statt k die Wellenlänge λ ein, so ergibt sich

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{A \pi^2 R^2}{\lambda^2} \left\{ Ci k|x| \cos k|x| \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \pi + Si k|x| \right) \sin k|x| \right\} (1 - \cos \omega t). \end{array} \right.$$

Für das stationäre Wellenbild ergibt sich nach (40)

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = -\frac{\pi A R^2 k^2}{4} \left\{ \frac{1}{\pi} \left[Ci k|x| \cos k|x| \right. \right. \\ \left. \left. + \sin k|x| \left(Si k|x| + \frac{1}{2} \pi \right) \right] \cos \omega t - \cos k|x| \sin \omega t \right\}. \end{array} \right.$$

Für großes x ergibt sich nach (41)

$$(46a) \quad \eta_{x \rightarrow \infty} = -\frac{\pi A R^2 k^3}{4} \sin(k|x| - \omega t).$$

Auch hier führen wir für k die Wellenlänge λ ein und erhalten:

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = -\frac{A \pi^3 R^2}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{\pi} \left[Ci k|x| \cos k|x| \right. \right. \\ \left. \left. + \sin k|x| \left(Si k|x| + \frac{1}{2} \pi \right) \right] \cos \omega t - \cos k|x| \sin \omega t \right\} . \end{array} \right.$$

und

$$(47a) \quad \eta_{x \rightarrow \infty} = \frac{A \pi^3 R^2}{\lambda^2} \sin(\omega t - k|x|).$$

Die Wellenamplitude ist also in allen Fällen proportional der erzwungenen Plattenamplitude und dem Quadrat des Plattenhalbmessers. Sie ist umgekehrt proportional dem Quadrat der erzwungenen Wellenlänge. Es empfiehlt sich statt der Wellenlänge und der Wellenamplitude dimensionslose Größen einzuführen, die gerade beim Vergleich mit dem Experiment von besonderer Bedeutung werden. Wir führen

$$(48) \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{A},$$

die bezogene Wellenoberfläche

$$(49) \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{R},$$

die bezogene Wellenlänge, ein. Damit geht (47) über in

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\eta} = -\frac{\pi^3}{\bar{\lambda}^2} \left\{ \frac{1}{\pi} \left[\cos k|x| Ci k|x| \right. \right. \\ \left. \left. + \sin k|x| \left(Si k|x| + \frac{1}{2} \pi \right) \right] \cos \omega t - \cos k|x| \sin \omega t \right\} \end{array} \right.$$

und (47a) in

$$(50a) \quad \eta_{x \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{\bar{\lambda}^2} \sin(\omega t - k|x|).$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich die bezogene Wellenamplitude

$$(51) \quad \bar{a} = \frac{a}{A} = \frac{\pi^3}{\bar{\lambda}^2}.$$

6. Die schwingende Platte endlicher Breite

Die Formeln des 3. Abschnittes sollen nun für eine endlich breite Druckverteilung verallgemeinert werden, wie sie eine an der Oberfläche einer Flüssigkeit schwingende endliche

Platte erzeugt. Hierzu müssen wir vom allgemeinen Fourierintegral (2) ausgehen.

Wir setzen die an der Oberfläche gegebene Druckverteilung an zu

$$(52) \quad P_0 = f(x) \cos \omega t$$

und entwickeln $f(x)$ nach (2). Zunächst rechnen wir wieder mit nur einem Gliede des Fourierintegrals. Dieses lautet aber jetzt:

$$(53) \quad P_0^* = f(\alpha) e^{p(x-\alpha)} \cos \omega t.$$

Die Oberflächenbedingung (8) geht über in

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} = - \frac{\omega}{q} e^{p(x-\alpha)} f(\alpha) \sin \omega t.$$

Die Rechnung wird genau wie im 4. Abschnitt durchgeführt. Man muß nur $x - \alpha$ statt α setzen und mit $f(\alpha)$ multiplizieren. Hinterher muß noch über α integriert werden. Man erhält so für die Oberfläche

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{k}{2gq} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{+R} f(\alpha) \left\{ \cos k(|x| - \alpha) Ci(k|x| - \alpha) \right. \\ \left. + \sin(k|x| - \alpha) \left(Si(k|x| - \alpha) + \frac{1}{2} \pi \right) \right\} d\alpha \cos \omega t. \end{array} \right.$$

Über der endlichen Druckverteilung selbst kommt noch das singuläre Integral

$$(55) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-R}^{+R} f(\alpha) e^{p(x-\alpha)} dp d\alpha.$$

hinzu. Der Integrand wird für $x = \alpha$ singulär. Man kann nicht ohne weiteres aussagen, was dies Integral ausmacht.

Die allgemeine Auswertung des Integrales (54) ist sehr kompliziert. Deswegen wollen wir uns auf Fälle beschränken, für die x sehr groß ist. Dann brauchen wir auf das Integral (55) keine Rücksicht zu nehmen und das Integral (54) vereinfacht sich zu

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{k}{2gq} \left\{ \int_{-R}^{+R} f(\alpha) \cos k\alpha d\alpha \cdot \sin k|x| \right. \\ \left. - \int_{-R}^{+R} f(\alpha) \sin k\alpha d\alpha \cdot \cos k|x| \right\} \cos \omega t. \end{array} \right.$$

Um genaue Angaben über die Lösung dieses Integrales zu machen, muß man zunächst genaue Angaben über die Funktion $f(\alpha)$ machen. Wir wählen für $f(\alpha)$ wieder dieselbe Funktion, die wir im letzten Abschnitt gewählt haben. Dann ist wieder

$$(42) \quad f(\alpha) = -A \varrho \omega^2 \sqrt{R^2 - \alpha^2}.$$

Die Druckverteilung soll sich von $-R$ bis $+R$ erstrecken. Es wird also

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = -\frac{A k^2}{2} \left\{ \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - \alpha^2} \cos k\alpha d\alpha \sin k|x| \right. \\ \left. + \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - \alpha^2} \sin k\alpha d\alpha \cdot \cos k|x| \right\} \cos \omega t. \end{array} \right.$$

Nun ist aber

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_1 = \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - \alpha^2} \cos k\alpha d\alpha = 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - \alpha^2} \cos k\alpha d\alpha. \\ J_2 = \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - \alpha^2} \sin k\alpha d\alpha = 0. \end{array} \right.$$

Führen wir $\frac{\alpha}{R} = u$ als neue Veränderliche ein und setzen $k \cdot R = z$, so erhalten wir

$$(58a) \quad J_1 = 2R^2 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} \cos zu du.$$

Integrale dieser Art können mit Besselschen Funktionen ausgewertet werden. Eine Integraldarstellung der Besselschen Funktion J_p lautet¹⁾:

$$(59) \quad J_p(z) = \Xi \int_0^1 \cos zu (1 - u^2)^{p - \frac{1}{2}} du,$$

wobei

$$(60) \quad \Xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^p}{\pi\left(p - \frac{1}{2}\right)}$$

1) E. Jahnke - F. Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1923. S. 170ff.

ist. Hierbei ist Π^1 die Gaußsche Gammafunktion. Um die Integraldarstellung in unserer gewünschten Form zu haben, setzen wir $p = 1$ und erhalten

$$(61) \quad J_1(z) = \frac{2z}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \cos zu \, du,$$

da

$$(61a) \quad \Xi_1 = \frac{2z}{\pi}.$$

Unser Integral (58) wird also bis auf einen konstanten Faktor durch die Besselfunktion J_1 dargestellt. Wir erhalten

$$(62) \quad J_1 = 2R^2 \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \cos zu \, du = \frac{\pi R^2}{z} J_1(z) = \frac{\pi R}{k} J_1(kR).$$

Die Oberfläche ergibt sich dann zu

$$(63) \quad \eta' = -\frac{A k R \pi}{2} J_1(kR) \sin k|x| \cos \omega t.$$

Wir führen statt k die Wellenlänge λ ein:

$$(63a) \quad \eta' = -\frac{A \pi^2 R}{\lambda} J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right) \sin k|x| \cos \omega t.$$

Auch hier ergibt sich wieder als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung eine stehende Welle. Wir müssen aber wieder fordern, daß sich im Unendlichen eine einfache harmonische forlaufende Welle ausbilden muß. Um dieses zu erreichen, fügen wir die Lösung der homogenen Gleichung

$$(64) \quad \eta'' = \frac{A \pi^2 R}{\lambda} J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right) \cos k|x| \sin \omega t.$$

hinzu und erhalten als Gesamtlösung

$$(65) \quad \eta = \frac{A \pi^2 R}{\lambda} J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right) \sin(\omega t - k|x|).$$

Die Wellenamplitude ist gegeben durch

$$(66) \quad a = \frac{A \pi^2 R}{\lambda} J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right).$$

Die Wellenamplitude ist wieder proportional der erzwungenen Plattenamplitude. Der Zusammenhang zwischen Wellenamplitude und Plattenhalbmesser und Wellenlänge wird aber komplizierter wie in dem eben betrachteten Grenzfall.

1) Vgl. Fußnote 1) S. 245, S. 26 ff.

Führen wir die bezogene Wellenlänge und Wellenamplitude ein, so ergibt sich

$$(67) \quad \bar{\eta} = \frac{\pi^2}{\bar{\lambda}^2} J_1 \left(\frac{2\pi}{\bar{\lambda}} \right) \sin(\omega t - k|x|).$$

$$(68) \quad \bar{a} = \frac{\pi^2}{\bar{\lambda}^2} J_1 \left(\frac{2\pi}{\bar{\lambda}} \right).$$

Da die Besselschen Funktionen in weiten Grenzen tabelliert worden sind, so ist es in allen praktisch wichtigen Fällen möglich, zu einer bestimmten bezogenen Wellenlänge — der entspricht eine bestimmte bezogene Frequenz

$$\bar{\omega}^2 = \frac{R \omega^2}{g} =$$

die bezogene Wellenamplitude zu berechnen.

Diese Formeln müssen natürlich als Spezialfall die der unendlich schmalen Platte mit enthalten. Wir erhalten sie auch, wenn wir für großes λ die Besselfunktion in eine Reihe entwickeln und nur das erste Glied berücksichtigen. Die anderen Glieder sind bei großen Wellenlängen zu vernachlässigen.

Die Abhängigkeit der bezogenen Wellenamplitude von der bezogenen Wellenlänge zeigt Fig. 2. Als Abszisse ist $\bar{\lambda}$ und als Ordinate \bar{a} aufgetragen. Mit wachsender Wellenlänge

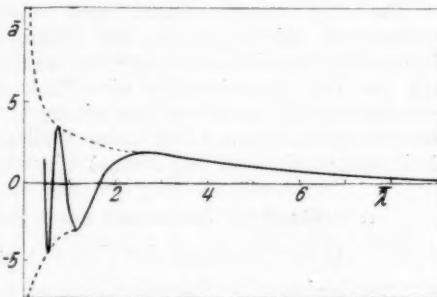


Fig. 2. Abhängigkeit der bezogenen Wellenamplitude \bar{a} von der bezogenen Wellenlänge

werden die Wellenamplituden beliebig klein. Mit kleiner werdender Wellenlänge werden die Wellenamplituden zunächst größer bis zu einem Maximum und nehmen dann wieder ab. In der Nähe von $\bar{\lambda} = 1$, d. h. $\lambda = R$, wo sich Plattenhalbmesser und Wellenlänge nur noch wenig unterscheiden, wird die Amplitude Null und dann negativ. Das negative Vorzeichen sagt aus, daß man statt $\sin(\omega t - k|x|)$ $\sin(k|x| - \omega t)$ in den Wellenformeln zu schreiben hat. Wir haben in diesem Fall eine Phasenverschiebung von 90° gegen die ursprüngliche Welle. Auch hier erreicht die Amplitude ein Maximum und

wird dann wieder kleiner. Sie wird Null, die Phasenverschiebung geht wieder zurück. Jetzt schwankt die Wellenamplitude um immer größere Beträge zwischen positiven und negativen Werten hin und her, um so häufiger, je mehr wir uns dem Ursprung nähern. In der Figur sind die gestrichelten Kurven die Kurven der Maxima und die Striche auf der Abszisse geben die Nullwerte an, solange sie noch zu unterscheiden sind. Im Nullpunkt selbst ist die Funktion unbestimmt.

Für die Schwankungen der Wellenamplituden bei kleinen Wellenlängen kann man eine einfache Erklärung finden:

Die Druckverteilung, mit der wir gerechnet haben, wurde an einer Platte, die ganz unter Wasser Schwingungen ausführt, berechnet. Hier wird die Platte wirklich als starres Ganzes schwingen. Bringen wir diese Druckverteilung aber an der Oberfläche an und berechnen daraus eine Wellenbewegung, so wird die Platte wegen der Störung durch die Wellenbewegung nicht mehr starr schwingen, sondern sie wird sich bei der Schwingung deformieren.

Bei der scharfkantigen Platte würden sich am Ende Spritzer und Wirbel ablösen, die Effekte verursachen würden, die aus der Theorie nicht abgeleitet werden können. Deshalb muß bei den Experimenten die Platte an den Enden abgerundet werden, um diese Erscheinungen zu vermeiden. Auch hieraus ergibt sich, daß für kleine Wellenlängen diese Theorie nicht mehr mit dem Experiment übereinzustimmen braucht.

7. Prüfung der Ergebnisse durch das Experiment

a) Beschreibung der Versuchsanordnung

Ein horizontaler Rahmen R ist in Kugellagern gelagert, so daß er sich um die Achse a der Kugellager drehen kann. Am Rahmen befinden sich die Gelenke G , an denen zwei vertikale Stäbe S angreifen, die den zu untersuchenden Körper K tragen (vgl. Fig. 3). Die untersuchte Platte ist an beiden Enden abgerundet, damit keine Störungen an den Endkanten auftreten. Die Platte war 12 cm breit und 2 cm dick. Die Apparatur ist in einem rechteckigen Tank so aufgebaut, daß der Körper K parallel zu den kurzen Endwänden des Tankes steht. In der Mitte der Verbindungsstange der beiden Gelenke G greift eine Feder F an, die durch den Exzenter E mittels des Motors M zu Schwingungen angeregt wurde und diese an das System weiter gab. An beiden Seiten können Zusatzfedern F' angebracht werden, um die Eigenschwingungszeit des Systemes zu ändern.

Zur Aasmessung der Schwingungsamplitude des Körpers wurde an R ein fest verbundener Stab A angebracht, der die Bewegungen des Rahmens mitmacht. Er zeichnet die Bewegungen des Rahmens auf einer sich drehenden Trommel Tr auf Papier auf. Eine einfache Umrechnung läßt uns die Schwingungsamplitude der Platte berechnen.

Der Körper war so bemessen, daß er gerade in den Tank hereinpäßt. Links und rechts sind 4—5 mm Zwischenraum zwischen Körper und Wand, damit hier keine Reibung auftritt. Er hing so hoch über dem Tankboden und der Tank war so weit mit Wasser gefüllt, daß die auftretenden Wellenlängen klein gegen die Tanktiefe waren. Die Pfeile in Fig. 3 zeigen die Richtung der fortlauenden Wellen an.

Die Schwingungszeit des Körpers bzw. der Wellen wurde mit der Stoppuhr oder mit einem Chronographen, der seine Zeitmarken mit auf die Trommel Tr drückte, gemessen. In beiden Fällen ergaben sich die gleichen Resultate.

Um eine Reflexion an den Tankwänden zu vermeiden, wurden an den kurzen Endwänden des Tankes Siebe schräge ins Wasser gelegt, an denen sich die Wellen totließen. Besonders bei größeren Wellenlängen arbeitete diese Einrichtung ausgezeichnet.

Um die Wellenamplituden und Wellenlängen zu messen, wurde in einer Entfernung von etwa 1 m von der Platte die Welle zu einem bestimmten Zeitpunkt schräge von oben photographiert vor der einen Längswand des Tankes. Um trotz der Verzerrung brauchbare Messungen machen zu können, wurde ein Maßstab mit aufgenommen (Fig. 4).

Da bei den erzwungenen Schwingungen die Eigenschwingung des Systems störend wirkte, wurde eine ziemlich starke Öl-dämpfung angebracht, mit der es gelang, die Störungen völlig zu beseitigen.

b) Vergleich zwischen Theorie und Versuch

Man kann die Ergebnisse dieser Arbeit mit Hilfe dieser Versuchsanordnung leicht nachprüfen. Bei verschiedenen er-

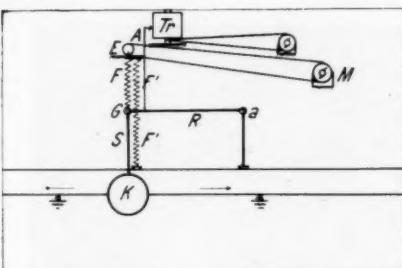


Fig. 3. Versuchsanordnung

zwungenen Wellenlängen, d. h. verschiedenen erzwungenen Frequenzen, wurden bei einer Platte von der halben Breite 6 cm die Wellenamplituden gemessen. Die Frequenz war vorgeschrieben durch die Tourenzahl des Motors.

Aus der Aufnahme wurden die Wellenamplituden und Wellenlängen ermittelt. Ein Beispiel für ein aufgenommenes Wellenbild gibt Fig. 4. Die Ergebnisse der Messungen zeigt Fig. 5. Als Ordinate ist die dimensionslose Wellenamplitude und als Abszisse die dimensionslose Wellenlänge aufgetragen.

Fig. 4. Ein aufgenommenes Wellenbild

Die Kurve stellt die theoretische Kurve dar. Sie ist ein Ausschnitt aus Fig. 2. Der negative Teil wurde umgeklappt, da der Absolutbetrag der Amplituden immer positiv sein muß. Das negative Vorzeichen bedeutet nur eine Phasenverschiebung.

Die Punkte stellen die durch den Versuch gefundenen Werte dar. Hier sehen wir den Vorteil der dimensionslosen Auftragung, da es sehr schwierig ist, eine Versuchsreihe mit konstanter Plattenamplitude durchzuführen. So kann man aber die verschiedensten Plattenamplituden und Plattenhalbmesser nehmen, solange sie nur mit den Voraussetzungen der Theorie übereinstimmen, und kann doch alle Werte mit einer einzigen Kurve vergleichen. Wellenlängen zwischen 7 cm und 54 cm wurden untersucht. Größere und kleinere Wellenlängen konnten mit der zur Verfügung stehenden Apparatur nicht erzeugt werden.

Die Form der Kurve stimmt bis etwa $\lambda = 1,5$ sehr gut mit dem Experiment überein. Die Abweichungen sind als

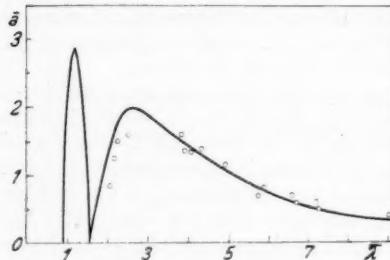


Fig. 5.
Vergleich zwischen Theorie und Versuch

densten Plattenamplituden und Plattenhalbmesser nehmen, solange sie nur mit den Voraussetzungen der Theorie übereinstimmen, und kann doch alle Werte mit einer einzigen Kurve vergleichen. Wellenlängen zwischen 7 cm und 54 cm wurden untersucht. Größere und kleinere Wellenlängen konnten mit der zur Verfügung stehenden Apparatur nicht erzeugt werden.

Die Form der Kurve stimmt bis etwa $\lambda = 1,5$ sehr gut mit dem Experiment überein. Die Abweichungen sind als

Fehler bei der Messung möglich, da die Versuche, die nur eine Bestätigung der Theorie sein sollten, nicht allzu genau gemacht sind. Erst wenn man in die Nähe von 1 kommt, treten größere Abweichungen auf.

Bei $\bar{\lambda} = 2,5$ ist die Abweichung zwischen gerechneter und gemessener Amplitude 17%.

Bei $\bar{\lambda} = 2$ ist diese Abweichung 23%.

Bei größeren Wellenlängen ist die Abweichung stets kleiner als 10%.

Die Sinusform der Wellen wurde nachgeprüft, indem einige Wellenaufnahmen in Fourierreihen zerlegt wurden. Ein Beispiel zeigt Fig. 6, die einen ziemlich ungünstigen Fall darstellt. Die Oberschwingungen sind unwesentlich (etwa 11%) und können von Störungen, denen die Apparatur ausgesetzt war, herrühren.

Zusammenfassung

1. Alte Resultate von Cauchy und Poisson werden auf neue Weise abgeleitet.

2. Für eine an der Oberfläche einer Flüssigkeit schwingende Platte werden die fortlaufenden Wellen, solange die Wellenlänge größer als die halbe Plattenbreite ist, abhängig von der Plattenamplitude und von der erzwungenen Wellenlänge berechnet.

3. Für die Platte wurden die Rechenergebnisse durch den Versuch nachgeprüft. Sie stimmen beide in dem untersuchten Gebiet gut überein.

Für Anleitung und Anregung beim Abfassen dieser Arbeit, die im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen durchgeführt wurde, schulde ich Herrn Prof. Schuler und Herrn Prof. Prandtl großen Dank.

Göttingen, Institut für angewandte Mechanik.

(Eingegangen 27. Oktober 1933)



Fig. 6. Vergleich
der experimentell gefundenen Welle
mit der gerechneten Sinuswelle

Röntgenspektroskopie und Abbildung mittels gekrümmter Kristallreflektoren

II. Beschreibung eines fokussierenden Spektrographen mit punktgetreuer Spaltabbildung

Von L. v. Hámoss

(Mit 8 Figuren)

Übersicht

Ein neuer, fokussierender Röntgenspektrograph wird beschrieben, bei dem als Reflektor ein zylindrisch gekrümmter Steinsalzkristall verwendet wird. Es werden die Konstruktionseinzelheiten mitgeteilt, sowie die Justierungsmethoden erläutert. An Hand von einigen Probeaufnahmen wird die Leistungsfähigkeit des Apparates gezeigt.

I. Konstruktionsgrundsätze

In der vorangegangenen Mitteilung hat Verf. die geometrisch-optischen Verhältnisse bei einem punktgetreu abbildenden Röntgenstrahlengang eingehend diskutiert.¹⁾ In



Fig. 1. Schema des Strahlenganges

werden unter dem Braggschen Glanzwinkel φ reflektiert und dabei zu dem reellen monochromatischen Spaltbild L auf der Bildebene E vereinigt. Bei dem hier zu beschreibenden Apparat, der auch für die systematische Untersuchung dieses Fokussierungsprinzipes geplant war, wurde ein weiter Spielraum für die Verstellbarkeiten, insbesondere bei der Verwendung von Kristallen mit verschiedenem Krümmungsradius

Fig. 1 sei nochmals ganz schematisch der Strahlengang eines auf diesem Prinzip beruhenden Spektrographen dargestellt. Durch den Spalt S gelangen die Röntgenstrahlen auf den zylindrisch gekrümmten Kristall K ,

1) L. v. Hámoss, Ann. d. Phys. [5] 17. S. 716. 1933; im folgenden kurz als (I) zitiert.

gelassen. Wir wollen wieder die Richtung der Rotationsachse des Kristalls mit *X*, die Richtung des Spaltes mit *Y* und die Richtung senkrecht zur Bildebene mit *Z* bezeichnen. Die zweckmäßigen Verstellbarkeiten sind dann folgende. Zunächst muß grundsätzlich der Spalt in die Bildebene gebracht werden können und auch die Rotationsachse *A—A* des Kristalls. Bei einem und demselben Krümmungsradius müssen Kristallhalter und Kassette in der Richtung *X* (Dispersionsrichtung) verschieblich sein für die verschiedenen Wellenlängenbereiche. Sodann muß der Kristallhalter bei der Verwendung verschieden stark gekrümmter Kristalle in der *Z*-Richtung verstellbar sein. Ferner ermöglicht eine Beweglichkeit der Kassette in der *Y*-Richtung die Erzeugung mehrerer Spektren auf derselben Platte (ähnlich wie bei den optischen Spektrographen). Außer diesen Verstellbarkeiten soll der Apparat als Ganzes um eine Spaltschneide schwenkbar sein, damit das Strahlenbündel der Röntgenröhre den Kristall im gewünschten Winkelbereich treffen soll.

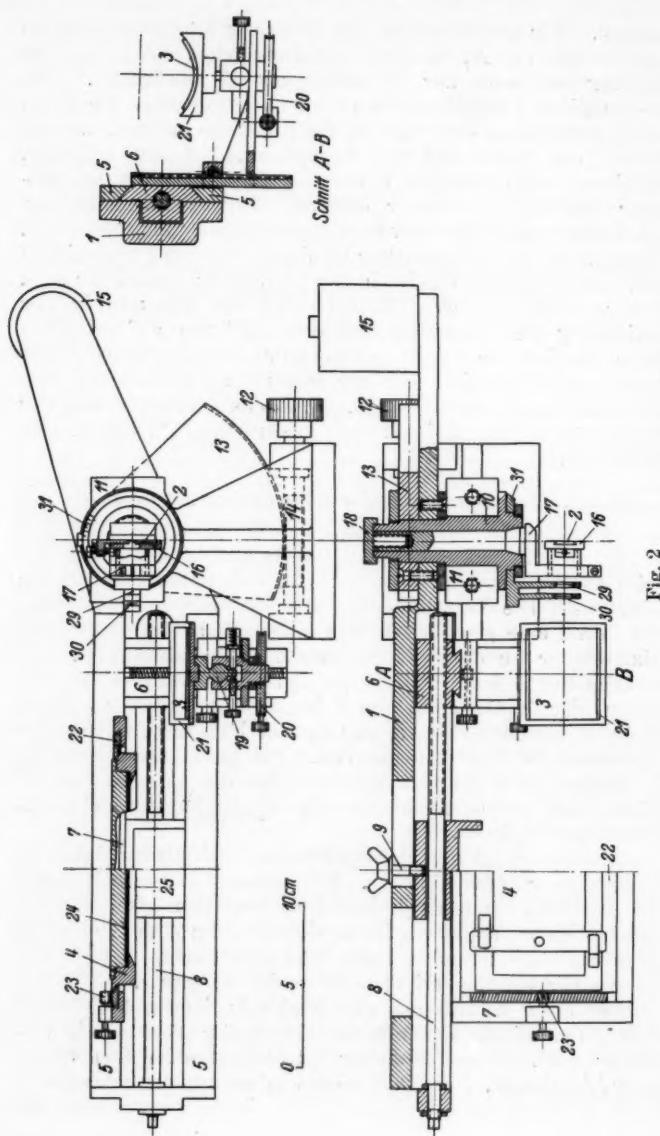
II. Mechanischer Aufbau des Spektrographen

Der Apparat soll an Hand der Konstruktionszeichnung in Fig. 2 erläutert werden. Die Grundplatte 1 trägt die drei Hauptbestandteile: den Spalt 2, den Kristall 3 und die Kassette 4. Die Verschieblichkeit in der Dispersionsrichtung wird durch eine gemeinsame Schwalbenschwanzführung 5 von Kristallhalter 6 und vom Kassettenrahmen 7 gewährleistet. Der Kristallhalter 6 kann mittels der Spindel 8 stetig verschoben werden, der Kassettenrahmen 7 ist nicht mit dieser Spindel gekuppelt, sondern kann in der gewünschten Lage mittels der Flügelschraube 9 arretiert werden. Die gemeinsame Führung von Plattenhalter und Kristallhalter hat den Vorteil, daß der Kristall mit einem Male für alle Wellenlängengebiete einjustiert werden kann.

Als Ganzes ist nun der Spektrograph mittels der Achse 10 in dem Lager 11 schwenkbar. Die Schwenkung erfolgt durch den Antrieb 12 mittels Zahnrad 13 und Schnecke 14. Um diesen Trieb zu entlasten, ist an dem anderen Arm der Grundplatte ein Gegengewicht 15 aus Blei angebracht.

An Einzelheiten sei noch folgendes mitgeteilt.

Der Spalt besteht aus zwei Stahlschneiden mit 45° Keilwinkel, die mittels feiner Schrauben in der Führung 16 verstellbar sind. Diese Führung ist ihrerseits in dem Spalthalter 17 befestigt. Der Spalthalter wird mittels der Schraube 18 in die Bohrung der Schwenkachse 10 eingespannt. Diese An-



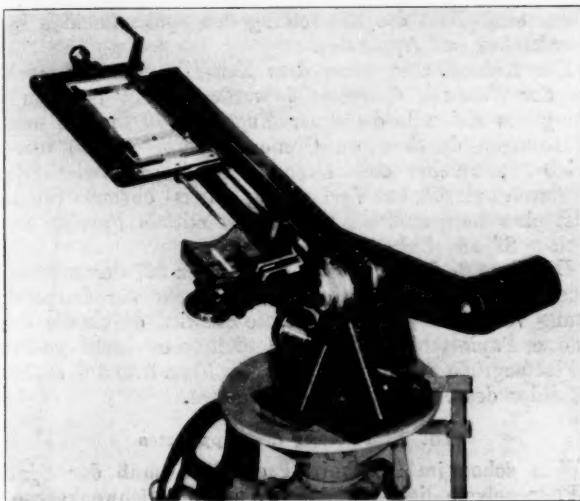


Fig. 3. Gesamtansicht des Spektrographen

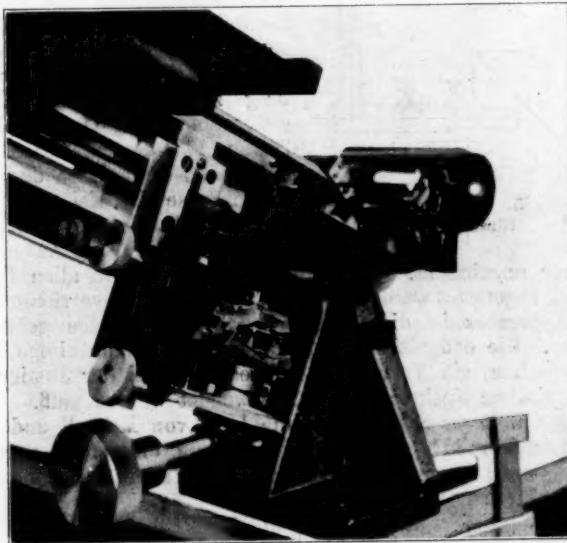


Fig. 4. Teilansicht des Spektrographen

ordnung ermöglicht die Einstellung der Spalschneiden in die Schwenkachse des Apparates.

Der Kristallhalter kann dem Kristallradius entsprechend längs der Führung 6 verstellt werden. Zur genauen Einstellung des Kristalls dient der Kugelkopf 19 (in den neueren Ausführungen durch einen Goniometerkopf ersetzt) und der Antrieb 20, welcher eine Drehung um die Z-Achse erlaubt. Der durch plastische Verformung eines ebenen Steinsalzspaltstückes hergestellte Kristall 3 ist mittels Paraffin an die Unterlage 21 aus Bakelit befestigt.

Die Kassette 4 hängt in dem Schlitten 22, der mittels des Antriebes 23 in dem Rahmen 7 senkrecht zur Dispersionsrichtung verstellbar ist. Die Platte 24 wird durch die dünne, schwarze Papierschicht 25 gegen sichtbares Licht geschützt. Die Plattengröße ist $12 \times 4,5$ cm. In Figg. 3 und 4 sind zwei Lichtbilder des Apparates wiedergegeben.

III. Einstellung des Apparates

Wie schon im Abschnitt I erwähnt, muß der Spalt in der Plattenebene liegen und auch mit der Schwenkachse des Apparates zusammenfallen. Man prüft dies am besten mit dem Höhenreißer an einer Richtplatte. Für die erste Einstellung des Kristalles ist eine in Fig. 5 dargestellte Einrichtung zweckmäßig. Der Kassettenrahmen 7 trägt einen Zapfen 26, dessen Achse mit der gewünschten Lage der Rotationsachse des Kristalles zusammenfällt. Auf diesem Zapfen ist der Halter 27 des Tasters 28

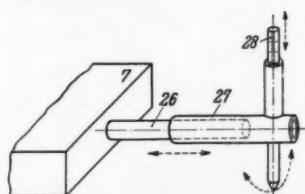


Fig. 5. Einstellvorrichtung für den Kristall

drehbar angebracht. Es kann so der Kristall in allen Richtungen abgetastet werden und mittels der Einstellvorrichtungen des Apparates in die (angenähert!) richtige Lage gebracht werden. Die endgültige Justierung erfordert dann einige Aufnahmereihen, ein Verfahren, welches auch bei der Justierung der optischen Spektrographen angewendet werden muß.

Als weiterer Schritt muß die Lage von Kristall und von der Kassette in der Dispersionsrichtung eingestellt werden. Der Abstand x einer Spektrallinie der Wellenlänge λ beträgt nun nach (I):

$$x = 2 \sqrt{\left(\frac{2d}{n\lambda}\right)^2 - 1}.$$

Diese Formel bezieht sich natürlich auf einen Kristall mit Einheitsradius. In der folgenden Tabelle sind nun für Stein-salz einige spezielle Werte berechnet, die bei der praktischen Anwendung des Apparates von Bedeutung sein könnten. Sie müssen nur für den jeweiligen Krümmungsradius des Stein-salzkristalles umgerechnet werden.

Den letzten Schritt bildet die Einstellung des Apparates in die richtige Lage relativ zu dem Strahlenbündel der Röntgenröhre. Zu diesem Zwecke ist der Apparat mit einer Einrichtung, bestehend aus einem Metallfaden 29 und einem Fluoreszenzschirm 30, versehen, die um die Schwenkachse 10 drehbar angeordnet ist. Die Einrichtung wird aus der in Fig. 2 gezeichneten Lage um den mittleren Glanzwinkel des zu untersuchenden Spektralbereiches verdreht. Der Winkel kann an der Skala 31 abgelesen werden. Nun wird der ganze Apparat so geschwenkt, daß der Schatten des Metallfadens 29 auf die Mitte des Fluoreszenzschirmes 30 fällt.

Tabelle
 $K\alpha_1$ -Linien

Ordnungs- zahl	Element	Wellenlänge in \AA	Glanzwinkel	x in cm
22	Ti	2743	29° 10'	3,583
23	Va	2498	26° 21'	4,037
24	Cr	2285	23° 57'	4,502
25	Mn	2097	21° 53'	4,979
26	Fe	1932	20° 05'	5,470
27	Co	1785	18° 30'	5,977
28	Ni	1655	17° 06'	6,500
29	Cu	1537	15° 51'	7,04
30	Zn	1432	14° 45'	7,60
31	Ga	1337	13° 44'	8,18
32	Ge	1251	12° 50'	8,78
33	As	1173	12° 02'	9,38
34	Se	1102	11° 18'	10,01
35	Br	1038	10° 38'	10,65
37	Rb	924	9° 27'	12,01
38	Sr	873	8° 56'	12,72
39	Y	827	8° 27'	13,46
40	Zr	784	8° 00'	14,23
41	Nb	745	7° 36'	14,99
42	Mo	708	7° 13'	15,79
44	Ru	642	6° 33'	17,42
45	Rh	612	6° 15'	18,26
46	Pd	584	5° 57'	19,19
47	Ag	558	5° 42'	20,03

Tabelle (Fortsetzung)

 $L\alpha_1$ -Linien

Ordnungs- zahl	Element	Wellenlänge in \AA	Glanzwinkel	x in cm
56	Ba	2770	29° 29'	3,537
57	La	2660	28° 12'	3,730
58	Ce	2556	27° 01'	3,922
59	Pr	2458	25° 54'	4,119
60	Nd	2365	24° 51'	4,318
62	Sm	2195	22° 57'	4,723
63	Eu	2116	22° 05'	4,925
64	Gd	2042	21° 17'	5,134
65	Tb	1971	20° 30'	5,349
66	Dy	1905	19° 47'	5,560
67	Ho	1841	19° 06'	5,775
68	Er	1781	18° 27'	5,995
69	Tm	1723	17° 50'	6,217
70	Yb	1668	17° 14'	6,447
71	Lu	1616	16° 41'	6,673
72	Hf	1566	16° 09'	6,906
73	Ta	1519	15° 40'	7,13
74	W	1474	15° 11'	7,37
75	Re	1430	14° 43'	7,62
76	Os	1388	14° 17'	7,85
77	Ir	1348	13° 52'	8,10
78	Pt	1310	13° 27'	8,36
79	Au	1274	13° 05'	8,605
80	Hg	1239	12° 43'	8,86
81	Tl	1205	12° 22'	9,12
82	Pb	1173	12° 02'	9,38
83	Bi	1142	11° 43'	9,64
90	Th	954	9° 46'	11,62
92	U	909	9° 18'	12,21

V. Vorläufige experimentelle Beispiele

Die folgenden Lichtbilder sind aus der großen Reihe von Probeaufnahmen entnommen und sollen das Charakteristische der Reflexion an gekrümmten Spaltflächen eines Steinsalzkristalles zeigen. Systematische Untersuchung des Reflexionsvermögens und der Abbildungsgüte bleiben einer weiteren Mitteilung vorbehalten.

Die hier mitgeteilten Aufnahmen beziehen sich auf einen zylindrischen Kristall mit 32 mm Krümmungsradius. Das gute Reflexionsvermögen für sichtbares Licht ist aus dem Lichtbild der Fig. 3 zu ersehen.

Um zu prüfen, wie weit das Reflexionsvermögen nach dem Biegevorgang gleichmäßig an dem ganzen Umfang des

Kristalles erhalten geblieben ist, wurden sogenannte „Queraufnahmen“, d. h. Aufnahmen mit senkrecht zur Rotationsachse gestellter Platte, gemacht. Dabei wird der Spalt möglichst kurz in der Y-Richtung gewählt, um eine ideale punktförmige Röntgenstrahlenquelle anzunähern.

In Fig. 6 ist eine Queraufnahme bei einem Kristall gemacht, der eine grobe Abweichung von der idealen zylindrischen



Fig. 6. Reflex von einem nicht stetig gebogenen Kristall



Fig. 7. Reflex von einem gebogenen Steinsalz

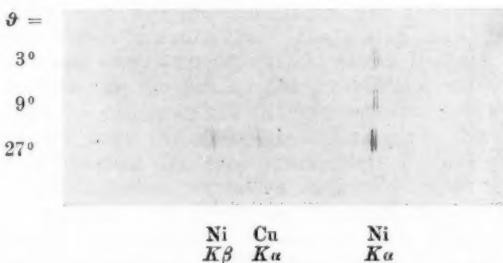


Fig. 8. Veranschaulichung des Intensitätszuwachses bei Vermehrung der „Öffnung“

Form aufweist. Die Figur ist aber insofern lehrreich, als man daraus Folgerungen bezüglich des Mechanismus der Verformung ziehen kann. Man erkennt deutlich, daß an einer Stelle eine größere Gleitung in Richtung der 110-Ebene stattgefunden hat. Das Problem ist daher, gerade die Größe dieser Gleitstufen möglichst gering zu halten. Einen besseren Reflex sehen wir in Fig. 7.

In Fig. 8 ist nun eine Aufnahmereihe mit dem Spektrographen dargestellt, die das Anwachsen der Lichtstärke bei steigendem Öffnungswinkel ϑ zeigen soll. Die Aufnahmen sind durchweg bei der gleichen Expositionszeit von 1 Min. entstanden bei einer Belastung der Ionensröhre mit 10 mA und 15 kV.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. h. c. V. M. Goldschmidt meinen herzlichsten Dank auszusprechen für seine wertvollen Ratschläge und für die großzügige Bereitstellung der Institutsmittel. Ich danke ferner zahlreichen Institutskollegen für gelegentliche wertvolle Hilfe bei der Herstellung der Abbildungen. Herrn Mechanikermeister H. Albrecht danke ich für die mustergültige Ausführung der Konstruktion bestens.

Göttingen, Mineralogisches Institut der Universität, den 30. Oktober 1933.

(Eingegangen 2. November 1933)

Wellenausbreitung in Kristallgittern

Von K. Försterling

(Mit 5 Figuren)

Einleitung

Die Bewegungen der Elektronenwellen in Kristallgittern sind bisher hauptsächlich nach der Methode der Eigenschwingungen behandelt worden. Es zeigte sich, daß die Eigenwerte der Elektronenenergien nicht überall gleichmäßig dicht liegen, sondern daß gewisse Lücken in der Energieskala vorhanden sind. Diese Lücken liegen in der Umgebung derjenigen Wellenlängen, welche der Braggschen Bedingung genügen. Eine experimentelle Bestätigung dieses eigentümlichen Resultates der Theorie könnte nur indirekt auf Grund von Ergebnissen ziemlich verwickelter Schlußfolgerungen geschehen. Die vorliegende Arbeit versucht nun das optische Analogon hierzu zu finden und den Zusammenhang mit bekannten optischen Beobachtungen herzustellen. Betrachtet man nämlich die Lichtfortpflanzung in einem geschichteten Medium, in dem der Brechungsindex von Ort zu Ort sinusförmig variiert, so zeigt sich, daß die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit eine anomale Dispersion zeigt für diejenige Wellenlängen, die der Braggschen Bedingung im eindimensionalen Falle genügen. Mit dem Auftreten einer anomalen Dispersion hängt nun, wie wir zeigen werden, jene Lücke im Energiespektrum aufs engste zusammen. Andererseits ist die anomale Dispersion optisch durchaus beobachtbar. Den bekanntesten Fall eines geschichteten Mediums mit periodisch sich ändernder Dielektrizitätskonstante haben wir in den Lippmannschen Farbenplatten vor uns. Nun hat in der Tat Kasterin¹⁾ derartige Beobachtungen angestellt, indem er eine Anzahl von Gelatinehäuten Lippmannscher Farbenplatten übereinander brachte und diese so hergestellte relativ dicke Platte in den Gang des einen Strahles eines Interferometers einschaltete. Die Interferenz-

1) E. Kirillow, *Journ. russ. phys.-chem. Ges.* **43**. *Phys. Journ.* 405. 1911.

strahlen zeigten dann das in Fig. 1 dargestellte Aussehen. Die Ausbiegungen in der Nähe der zur Belichtung verwandten Wellenlängen lassen eine anomale Änderung der Phasengeschwindigkeiten erkennen, wie wir sie im Gebiet der anomalen Dispersion zu finden gewohnt sind. (Allerdings vermochte ich aus der Arbeit nicht zu entnehmen, welches in

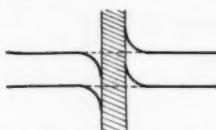


Fig. 1. Anomale Dispersion von Lippmann-Platten nach Kirillow

Fig. 1 die Richtung wachsender Wellenlänge ist.) Im Anschluß an eine Untersuchung über die Lichtausbreitung in geschichteten Medien hatte ich kurz gezeigt, daß eine derartige Anomalie von der Theorie tatsächlich gefordert wird. In der vorliegenden Arbeit wird die Betrachtung auf dreidimensionale Krystallgitter erweitert. Da andererseits die nach der früher benutzten Methode gewonnene Näherung in gewisser Hinsicht weiterreicht als die hier erhaltene, so stellen wir in der Einleitung kurz die Ergebnisse zusammen, welche die früher benutzte Methode liefert, zumal wir jetzt diese Rechnung zum Vergleich und zur Erweiterung der jetzigen Resultate etwas allgemeiner und exakter durchführen müssen, als es der Zweck der früheren Arbeit erforderte.¹⁾

Wir gehen aus von den Maxwellschen Gleichungen für inhomogene Medien, wenn die Dielektrizitätskonstante allein von der Z-Achse abhängig ist. Wir setzen periodische Lösungen voraus und nehmen an, daß die XZ-Ebene die Einfallsebene ist, der Zustand also von Y nicht abhängt. Dann haben die Gleichungen für \mathfrak{E}_y und \mathfrak{H}_z die Form:

$$(1) \quad -\omega^2 \frac{s(z)}{c^2} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

während für \mathfrak{H}_y gilt:

$$(1a) \quad -\omega^2 \frac{s(z)}{c^2} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{s(z)} \frac{\partial s(z)}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Diese Gleichungen lassen sich in den Variablen separieren. Als Lösungen machen wir den Ansatz:

$$(2) \quad \begin{cases} U = A e^{-i \frac{\omega}{c} n a x} \cdot e^{\pm i \frac{\omega}{c} \int \zeta_{\pm}(z) dz} \\ u = B e^{-i \frac{\omega}{c} n a x} \cdot e^{\pm i \frac{\omega}{c} \int s(z) \xi_{\pm}(z) dz}, \end{cases}$$

wobei $n^2 \alpha^2 = \text{const}$ die Separationskonstante ist. Wir bestimmen die neuen Unbekannten ζ_{\pm} und ξ_{\pm} durch die beiden Gleichungen

1) K. Försterling, *Phys. Ztschr.* 15. S. 225 u. 940. 1914.

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\zeta_{\pm}}{dz} \pm i \frac{\omega}{c} \zeta^2 = \pm i \frac{\omega}{c} \{ \varepsilon(z) - n^2 \alpha^2 \} \\ \frac{d\xi_{\pm}}{dz} \pm i \frac{\omega}{c} \xi^2 = \pm i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon(z) - n^2 \alpha^2}{\varepsilon(z)}. \end{cases}$$

Eine sukzessive Näherung ist im allgemeinen möglich, wenn sich $\varepsilon(z)$ in der Form

$$(4) \quad \varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \eta(z) \quad (\varepsilon_0 \text{ konstant})$$

schreiben lässt und $\eta(z)$ klein neben ε_0 ist. Wir setzen dementsprechend die Lösungen in der Form an:

$$(5) \quad \zeta_{\pm} = \zeta_{\pm}^{(0)} + \zeta'_{\pm} + \zeta''_{\pm} + \dots; \quad \xi_{\pm} = \xi_{\pm}^{(0)} + \xi'_{\pm} + \xi''_{\pm} + \dots.$$

Der periodischen Struktur des Mediums entsprechend sei

$$(6) \quad \eta(z) = \frac{\eta_0}{i} (e^{+ibz} - e^{-ibz}) = 2 \eta_0 \sin bz.$$

Indem wir setzen:

$$(7) \quad \zeta^{(0)} = \varepsilon_0 \xi^{(0)} = \sqrt{+ \varepsilon_0 - n^2 \alpha^2},$$

gewinnen wir eine erste Näherung:

$$(8) \quad \begin{cases} \zeta'_{\pm} = \mp i \frac{\omega}{c} \eta_0 \left\{ \frac{e^{+ibz}}{b \pm 2 \frac{\omega}{c} \zeta^{(0)}} + \frac{e^{-ibz}}{b \mp 2 \frac{\omega}{c} \zeta^{(0)}} \right\} \\ \xi'_{\pm} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \zeta'_{\pm} \left(1 - 2 \frac{\alpha^2 n^2}{\varepsilon_0} \right). \end{cases}$$

In der Umgebung der Stelle $b \pm 2 \frac{\omega}{c} \zeta^{(0)} = 0$ versagt unser Näherungsverfahren.

Die zweite Näherung würde lauten:

$$(9) \quad \begin{cases} \zeta''_{\pm} = \pm \frac{\omega^3}{c^2} \eta_0^2 \left\{ \frac{e^{+2ibz}}{\left(b \pm 2 \frac{\omega}{c} \zeta^{(0)} \right)^2 \left(2b \pm 2 \frac{\omega}{c} \zeta^{(0)} \right)} \right. \\ \left. - \frac{e^{-2ibz}}{\left(b \mp 2 \frac{\omega}{c} \zeta^{(0)} \right)^2 \left(2b \mp 2 \frac{\omega}{c} \zeta^{(0)} \right)} \right\} + \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \eta_0^2 \frac{1}{\zeta^{(0)}}}{b^2 - 4 \frac{\omega^2}{c^2} \zeta^{(0)2}} \\ \xi''_{\pm} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(1 - 2 \alpha^2 \right)^2 \zeta''_{\pm} \\ + i \frac{\omega^3}{c^2} \eta_0^2 \frac{2 \zeta^{(0)}}{\varepsilon_0} (1 - 2 \alpha^2) \Theta_1(z) + \Theta_2(z). \end{cases}$$

Hierbei ist gesetzt:

$$(9a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_1(z) = e^{+2i\frac{\omega}{c}\zeta^{(0)}z} \int \left\{ \frac{e^{+2i\frac{\omega}{c}bz}}{b - 2\frac{\omega}{c}\zeta^{(0)}} - \frac{e^{-2i\frac{\omega}{c}bz}}{b + 2\frac{\omega}{c}\zeta^{(0)}} \right\} e^{-2i\frac{\omega}{c}\zeta^{(0)}z} dz \\ \quad - e^{+2i\frac{\omega}{c}\zeta^{(0)}z} \int \frac{4\frac{\omega}{c}\zeta^{(0)}}{b^2 - 4\frac{\omega^2}{c^2}\zeta^{(0)2}} e^{-2i\frac{\omega}{c}\zeta^{(0)}z} dz \\ \Theta_2(z) = i\frac{\omega}{c} e^{+2i\frac{\omega}{c}\zeta^{(0)}z} \int \frac{\eta(z) \left(1 - \frac{\zeta^{(0)2}}{\epsilon_0}\right)}{\epsilon_0} e^{-2i\frac{\omega}{c}\zeta^{(0)}z} dz. \end{array} \right.$$

Wir gehen nun so vor, daß wir annehmen, daß das inhomogene Medium eine Platte von der Dicke D bildet und zwischen $z = -D$ und $z = 0$ liegt. Wir wollen der Einfachheit halber voraussetzen, daß die Platte eine ganze Zahl von Lamellen enthält. Zu beiden Seiten sei der Brechungsexponent n_1 und weiter mag $\epsilon_0 = n_1^2$ sein. Die einfallende Welle im ersten Medium bezeichnen wir mit U_e , u die durchgegangene im dritten Medium mit U_d , u_d . Ihre Richtungskosinus seien $\alpha_1 \gamma_1$. Kürzen wir ab:

$$(10) \quad e = e^{-i\frac{\omega}{c} \int_{-D}^0 (\zeta_+ + \zeta_-) dz}, \quad e' = e^{-i\frac{\omega}{c} \int_{-D}^0 \zeta_- dz},$$

so würden wir für die durchgegangene Welle an der Stelle $z = 0$ mit Benutzung der Grenzbedingung der Maxwellschen Theorie finden:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (U_d)_{z=0} = \frac{2n_1\gamma_1(\zeta_+ + \zeta_-)_{z=0} \cdot e' \cdot [U_e]_{z=-D}}{(n_1\gamma_1 + [\zeta_-]_{z=-D})(n_1\gamma_1 + [\zeta_+]_{z=0})} \\ \quad - (n_1\gamma_1 - [\zeta_+]_{z=-D})(n_1\gamma_1 - [\zeta_-]_{z=0}) e \end{array} \right.$$

Nun ist

$$(12) \quad [\zeta_\pm]_{z=0} = [\zeta_\pm]_{z=-D}, \quad [\zeta'_\pm]_{z=0} = -[\zeta'_\pm]_{z=0}$$

und daher schreibt sich die Gl. (11):

$$(13) \quad U_d = e' \left\{ 1 + \frac{[\zeta'^2]_{z=0}}{4n_1^2\gamma_1^2} (1 - e) \right\} [U_e]_{z=-D}.$$

Zu der ganz analogen Formel gelangt man für u_d , indem man ζ_\pm durch ξ_\pm ersetzt. Wir diskutieren nun die beiden Faktoren

$$e' \quad \text{und} \quad 1 + \frac{[\zeta'^2]_{z=0}}{4n_1^2\gamma_1^2} (1 - e)$$

gesondert. Der zweite Faktor, in dem $e = e^{-2i \frac{\omega}{c} n_1 y_1 D}$ gesetzt werden kann, veranlaßt sowohl eine Änderung der Größe der Amplitude, als auch der Phase mit wachsender Dicke. Doch ist diese Änderung eine periodische und schwankt um Null herum. Sie tritt in ähnlicher Weise durch Interferenz beim Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Platte auf. Zu dem mittleren Brechungsindex der Schicht, über eine größere Dicke gemessen, liefert also dieser Faktor keinen Beitrag. Der mittlere Brechungsindex, auf den es uns hier allein ankommt, wird also allein durch den Exponenten in e' bestimmt. Da die Schicht eine ganze Anzahl von Lamellen enthalten soll, muß an beiden Grenzen $\eta(z)$ verschwinden. Unter dieser Bedingung haben wir die beiden Integrale

$$\int_{-D}^0 \zeta_-(z) dz \quad \text{und} \quad \int_{-D}^0 \epsilon(z) \xi_-(z) dz$$

zu berechnen. Man findet:

$$(14) \quad \int_{-D}^0 \zeta_-(z) dz = \left\{ n_1 \gamma_1 + \frac{\eta_0^2 \frac{\omega^2}{c^2}}{\zeta^{(0)} \left(b^2 - 4 \frac{\omega^2}{c^2} \zeta^{(0)2} \right)} \right\} D.$$

Die Berechnung des zweiten Integrals ist etwas komplizierter. Zunächst ergibt sich:

$$(15) \quad \int_{-D}^0 \Theta_1(z) dz = -i \frac{2D}{b^2 - 4 \frac{\omega^2}{c^2} \zeta^{(0)2}}.$$

Auch das Integral über $\Theta_2(z)$ ergibt einen zu D proportionalen Anteil. Indessen tritt hier an Stelle von $b^2 - 4 \frac{\omega^2}{c^2} \zeta^{(0)2}$ im

Nenner $2 \frac{\omega}{c} \zeta^{(0)}$ auf, so daß dieses Glied klein neben (15) ist, wenn wir uns auf die Umgebung der Stelle $b = 2 \frac{\omega}{c} \zeta^{(0)}$ beschränken, und daher wegleben kann. Mit dieser Annäherung findet man schließlich:

$$(16) \quad \int_{-D}^0 \epsilon(z) \xi(z) dz = \left\{ n_1 \gamma_1 + (1 - 2 \alpha^2)^2 \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{\zeta^{(0)}} \eta_0^2}{b^2 - 4 \frac{\omega^2}{c^2} \zeta^{(0)2}} \right\} D.$$

Diese Formeln zeigen bereits die charakteristische Anomalie für die Wellenausbreitung in der Nähe der kritischen

Frequenz und führen theoretisch zu der beobachteten anomalen Dispersion des Lichts in der Lippmannschen Farbenplatte. Wir wollen indessen an dieser Stelle noch nicht auf die nähere Diskussion eingehen, sondern unsere Betrachtungen zunächst auf dreidimensionale Kristallgitter erweitern. In diesem Falle sind allerdings die Maxwellschen Gleichungen nicht mehr in ihren Variablen separierbar, so daß die bisher angewandte Methode versagt.

I. Allgemeine Näherungsmethode

a) Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

Wir setzen jetzt

$$(17) \quad \epsilon(xyz) = \epsilon_0 + \eta(xyz)$$

und nehmen wieder η als sehr klein an. Wahre Ladungen seien nur am Ort der Lichtquelle vorhanden, ihre Dichte sei ρ_0 und der dazu gehörige Strom $i_0 = \rho_0 v_0$. Wir suchen wieder in bekannter Weise eine Lösung durch sukzessive Annäherung, indem wir setzen:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 + \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'', \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0 + \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'' \dots$$

Hierbei bestimmt sich $\mathfrak{E}^{(h)}$ und $\mathfrak{H}^{(h)}$ aus den Gleichungen

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi i^{(h)} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathfrak{E}^{(h)}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}^{(h)} \quad \epsilon_0 \operatorname{div} \mathfrak{E}^{(h)} = 4\pi \rho^{(h)} \\ - \frac{\partial \mathfrak{H}^{(h)}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{E}^{(h)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{H}^{(h)} = 0. \end{array} \right.$$

Zur Abkürzung ist gesetzt

$$(19) \quad -\rho^{(h)} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{4\pi} \eta \mathfrak{E}^{(h-1)} \right) \quad i^{(h)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (\eta \mathfrak{E}^{(h-1)})}{\partial t} \quad h \geq 1.$$

Da zwischen $i^{(h)}$ und $\rho^{(h)}$ identisch die Beziehung

$$\frac{\partial \rho^{(h)}}{\partial t} + \operatorname{div} i^{(h)} = 0$$

besteht, können wir zur Lösung in der üblichen Weise den Hertzschen Vektor $\mathfrak{Z}^{(h)}$ benutzen, aus dem sich die Feldstärken ergeben

$$\mathfrak{E}^{(h)} = + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \mathfrak{Z}^{(h)} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^{(h)}}{\partial t^2}; \quad \mathfrak{H}^{(h)} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathfrak{Z}^{(h)}}{\partial t}.$$

Bei Einführung des Vektors m durch die Gleichung

$$(20) \quad m^{(h)} = \frac{1}{4\pi} \eta \mathfrak{E}^{(h-1)}, \quad -\rho^{(h)} = \operatorname{div} m^{(h)}, \quad i^{(h)} = \frac{\partial m^{(h)}}{\partial t}$$

finden wir als Lösung

$$(21) \quad \mathfrak{Z}^{(h)} = \int \frac{[\mathfrak{m}^{(h)}]_{t-\frac{r}{v}}}{r} dV \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}$$

oder nach Einführung des Wertes für $\mathfrak{m}^{(h)}$

$$(21) \quad \mathfrak{B}^{(h)} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{[\eta \mathfrak{E}^{(h-1)}]_{t-\frac{r}{v}}}{r} dV.$$

\mathfrak{E} soll eine periodische Funktion der Zeit mit der Frequenz ω sein. Das gleiche gilt dann von $\mathfrak{m}^{(h)}$.

Die Rechnung führt also zunächst auf den Ausdruck für den Hertzschen Vektor, aus dem dann die elektrische Feldstärke mit Hilfe der bekannten Beziehung:

$$(22) \quad \mathfrak{E} = \left\{ 3 \mathfrak{r} (\mathfrak{r} \mathfrak{m}) - \mathfrak{m} r^2 \right\} \left\{ \frac{1}{r^5} + \frac{i \omega}{r^4} \right\} - \left\{ \mathfrak{r} (\mathfrak{r} \mathfrak{m}) - \mathfrak{m} r^2 \right\} \frac{\omega^2}{r^3}$$

zu gewinnen sind. Hierin ist \mathfrak{m} zur Zeit $t - \frac{r}{v}$ zu bilden. r ist der Abstand des betrachteten strahlenden Volumenelementes vom Beobachtungspunkt, \mathfrak{r} ist der Vektor, der von dem Volumenelement zum Beobachtungspunkte zeigt. Der letzte Term von \mathfrak{E} , der umgekehrt wie r abnimmt, ist der Strahlungsanteil. Er überwiegt, sobald die Entfernung Lichtquelle-Beobachter groß neben der Wellenlänge ist. Wir werden ihn im folgenden allein zu berücksichtigen haben, denn es läßt sich zeigen, daß

$$(23) \quad \int \frac{3 \mathfrak{r} (\mathfrak{r} \mathfrak{m}) - \mathfrak{m} r^2}{r^n} dV \quad n = 4, 5$$

verschwindet, wenn das Integral über eine kleine Kugel um den Nullpunkt genommen wird. Man sieht dies am einfachsten ein, indem man die Z-Achse parallel \mathfrak{m} , d. h. $\mathfrak{E}^{(h-1)}$ legt. Ferner entwickelt man $\eta \mathfrak{E}^{(h-1)}$ in eine Taylorsche Reihe, um $r = 0$

$$\eta \mathfrak{E}^{(h-1)} = (\eta \mathfrak{E}^{(h-1)})_0 + \frac{\partial (\eta \mathfrak{E}^{(h-1)})}{\partial x} x + \dots \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\eta \mathfrak{E}^{(h-1)})}{\partial x^2} x^2 + \dots$$

Das erste Glied dieser Reihe, in (23) eingesetzt, führt dann auf Integrale von der Form

$$\int \frac{xz}{r^n} dV \quad \int \frac{yz}{r^n} dV \quad \int \frac{3z^2 - r^2}{r^n} dV$$

die sämtlich verschwinden. Die linearen Glieder in X, Y, Z liefern Integrale

$$\int \frac{x^2 y}{r^n} dV, \quad \int \frac{xyz}{r^n} dV, \quad \int \frac{z^2}{r^n} dV, \quad \int \frac{z}{r^n} dV,$$

die ebenfalls über die kleine Kugel erstreckt verschwinden. Betrachten wir weiter die Glieder höherer Ordnung, so tritt bei Einführung von Polarkoordinaten bereits im Zähler der Ausdruck $r dr$ auf, so daß also mit abnehmendem Kugelradius der Beitrag dieser Glieder verschwindet. Für größere Entfernung überwiegen aber, wie gesagt, die Strahlungsglieder die übrigen. Wir werden es im folgenden nur mit solchen Fällen zu tun haben, wo sehr viele Atome zu der gestreuten Amplitude einen Beitrag liefern. Da die Wellenlänge dann kommensurabel mit dem Gitterabstand ist, so wird insgesamt der Strahlungsterm die übrigen Glieder bedeutend überwiegen, so daß wir ihn allein beibehalten wollen.

b) Elektronenbeugung

Der Behandlung der Elektronenbeugung legen wir die einfache Schrödingersche Gleichung zugrunde:

$$(24) \quad a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mathcal{A} \psi.$$

ψ ist die gesuchte Wellenfunktion und für a gilt

$$(25) \quad a = \frac{2m(E - \Phi)}{E^2}$$

(m Masse des Elektrons, E seine gesamte, Φ seine potentielle Energie).

Wir schreiben nun:

$$(26) \quad a = a_0 + a'(x y z).$$

Ähnlich wie oben setzen wir a' als klein voraus und suchen wieder die Gleichung in bekannter Weise durch sukzessive Annäherung zu befriedigen, indem wir setzen

$$(27) \quad \psi = \psi^{(0)} + \psi' + \psi'' + \dots$$

wobei $\psi^{(h)}$ den Gleichungen zu genügen haben:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial t^2} = \mathcal{A} \psi^{(0)} \\ a' \frac{\partial^2 \psi^{(h-1)}}{\partial t^2} + a_0 \frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial t^2} = \mathcal{A} \psi^{(h)}. \end{array} \right.$$

Wir denken uns die „einfallende Welle“ $\psi^{(0)}$ gegeben, welche

die erste Gleichung befriedigt. Dann ergeben sich die weiteren Näherungen durch die Rekursionsformel:

$$(29) \quad \psi^{(h)} = + \frac{1}{4\pi} \int \frac{a' \left[\frac{\partial^2 \psi^{(h-1)}}{\partial t^2} \right]_{t-\frac{r}{v}}}{r} dV.$$

Die Zusatzglieder \mathcal{Z}' bzw. ψ' röhren offenbar von den Wellen her, welche an den Volumenelementen dV gestreut sind. Die zweite Näherung kommt dann so zustande, daß die gestreuten Wellen nun ihrerseits noch ein zweites Mal abgebeugt werden.

II. Berechnung der ersten Näherung

Die Lichtquelle befindet sich im Punkte 0 (vgl. Fig. 2). Haben wir es mit Elektronenwellen zu tun, so wollen wir annehmen, daß ein etwa durch eine enge Blende ausgesondertes Strahlenbündel vom Punkt 0 ausgeht. Die Licht- bzw. Elektronenwellen gelangen dann parallel dem Vektor r_{01} zum Punkte (1) und mögen hier durch das Volumenelement dV_1 gestreut werden. Der Beobachter befindet sich im Punkte (2) . Die Lage von (2) gegenüber der Quelle 0 sei durch den Vektor r_{02} gegeben. In (2) legen wir später den Nullpunkt des Polarkoordinatensystems; r_{21} ist dann der Radiusvektor in diesem Koordinatensystem. (r_{hk} seien die absoluten Beträge der entsprechenden Vektoren.) ϑ und ϑ' seien die in Fig. 2 eingezzeichneten Winkel. Für die von 0 emittierte Feldstärke im Punkte (1) machen wir den Ansatz:

$$(30) \quad \mathfrak{E}^{(0)} = \mathfrak{F}^0 e^{i\omega \left(t - \frac{r_{01}}{v_0} \right)} \quad v_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}$$

und entsprechend für die Wellenfunktion ψ

$$\psi^{(0)} = F e^{i\omega \left(t - \frac{r_{01}}{v_0} \right)}.$$

Nach den Gl. (21) und (29) erhalten wir dann im Punkte (2) :

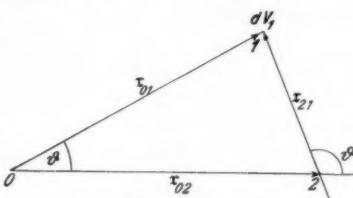


Fig. 2. Einfache Streuung.
0 Lichtquelle, 2 Beobachter

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}' = \frac{\mathfrak{F}_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \int \frac{\eta e^{-i\omega \frac{r_{01} + r_{12}}{v_0}}}{r_{12}} dV_1 \\ \psi' = -\omega^2 \frac{F_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \int \frac{a' e^{-i\omega \frac{r_{01} + r_{12}}{v_0}}}{r_{12}} dV_1. \end{array} \right.$$

Nunmehr führen wir den speziellen Ansatz für $\eta(xyz)$ und $a'(xyz)$ ein. Wir denken uns diese beiden Größen in eine dreifache Fouriersche Reihe entwickelt entsprechend der Gitterstruktur des Mediums. b_1, b_2, b_3 seien die Grundvektoren im reziproken Gitter. Unter $\frac{1}{2\pi} b_m$ wollen wir den Vektor

$$(32) \quad \frac{1}{2\pi} b_m = m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3 \\ (m_h \text{ ganze Zahl})$$

verstehen. Dann lässt sich $\eta(xyz)$ in einem beliebigen Punkte (h) darstellen durch

$$(33) \quad \eta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta_m e^{-i(b_m \mathbf{r}_2 \cdot h)}$$

und entsprechendes gilt für a' .

Setzen wir nun

$$(34) \quad \mathcal{B}' = \sum \mathcal{B}'_m, \quad \psi' = \sum \psi'_m,$$

so finden wir als Lösungen

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}'_m = \frac{\mathfrak{F}_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \eta_m \int \frac{e^{-i\left\{\omega \frac{r_{01} + r_{21}}{v_0} + (b_m \mathbf{r}_{21})\right\}}}{r_{21}} dV_1 \\ \psi'_m = -\omega^2 \frac{F_0 e^{i\omega t}}{4\pi} a_m \int \frac{e^{-i\left\{\omega \frac{r_{01} + r_{21}}{v_0} + (b_m \mathbf{r}_{21})\right\}}}{r_{21}} dV_1. \end{array} \right.$$

Zur weiteren Diskussion legen wir den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Punkt (2) und benutzen entweder rechtwinklige Koordinaten $x' y' z'$ oder Polarkoordinaten $r_{21}, \varphi', \vartheta'$ (vgl. Fig. 2).

Wir kürzen noch ab:

$$(36) \quad \omega \cdot \frac{r_{01} + r_{21}}{v_0} + (b_m \mathbf{r}_{21}) = S.$$

Das Raumintegral wird nur dann einen merklich von Null verschiedenen Wert haben, wenn es Raumgebiete gibt, in

denen der Exponent der e -Funktion in erster Näherung konstant ist. Im übrigen werden sich die Beiträge der einzelnen Volumenelemente gegenseitig aufheben, da die e -Funktion zwischen positiven und negativen Werten hin- und herschwankt. Wir brauchen also das Integral nur auf die Umgebung derjenigen Raumelemente auszudehnen, für die gilt

$$(37) \quad \frac{\partial S}{\partial r_{21}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \vartheta'} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi'} = 0.$$

Diese Bedingungen liefern die folgende Beziehung:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} (r_{01} = \sqrt{r_{02}^2 + r_{12}^2 + 2r_{12}r_{02} \cos \vartheta'}). \\ b_{m x'} = -\frac{\omega}{v_0} (\sin \vartheta + \sin \vartheta') \cos \varphi' \\ b_{m y'} = -\frac{\omega}{v_0} (\sin \vartheta + \sin \vartheta') \sin \varphi' \\ b_{m z'} = -\frac{\omega}{v_0} (\cos \vartheta + \cos \vartheta'). \end{array} \right.$$

Diese letzteren Gleichungen sind nichts anderes als die bekannten Laueschen Bedingungen (r_{21} kommt in ihnen nicht vor). Führen wir nämlich die Einheitsvektoren in der Richtung der einfallenden und gestreuten Wellennormale \mathfrak{N} und \mathfrak{N}' mit den Komponenten

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N}_x = \cos \varphi \sin \vartheta, \quad \mathfrak{N}_y = \sin \varphi \sin \vartheta, \quad \mathfrak{N}_z = \cos \vartheta \\ \text{und} \\ \mathfrak{N}'_x = -\cos \varphi' \sin \vartheta', \quad \mathfrak{N}'_y = -\sin \varphi' \sin \vartheta', \quad \mathfrak{N}'_z = \cos \vartheta' \end{array} \right.$$

ein, so folgt aus den Gl. (38) die Beziehung:

$$(40) \quad b_m = \frac{\omega}{v_0} (\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}).$$

Diese Gleichung bestimmt neben der Richtungsdifferenz der Wellennormalen \mathfrak{N} der einfallenden und \mathfrak{N}' der gebeugten Welle noch die Frequenz ω . Wir wollen diejenigen Werte der Richtungen und Frequenzen, die der Laueschen Bedingung genügen, durch den unteren Index 0 charakterisieren ($\omega_0, \mathfrak{N}'_0, \mathfrak{N}_0$). In der unmittelbaren Nähe eines solchen Wertesystems denken wir uns S in eine Taylorsche Reihe entwickelt, die dann die Form hat:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + \left(\frac{\partial S}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} \right)_0 \Delta r^2 + \dots \\ &= S_0 + \frac{\omega_0}{v_0} (r_{01} + r_{12}) \frac{\Delta \omega}{\omega_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} \right)_0 \Delta^2 r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi'^2} \right) \Delta \varphi'^2 + \dots \end{aligned}$$

Wir wollen in der Reihe nur die niedrigsten Glieder von Δr , $\Delta \vartheta'$, $\Delta \varphi$, $\Delta \omega$ beibehalten. Wir wollen uns hier auf den einfachsten Fall beschränken, daß die Lichtquelle sich in sehr großer Entfernung befindet, also die Krümmung der Wellenfront der einfallenden Welle vernachlässigen. Es folgt dann zunächst aus $r_{01} = \sqrt{r_{12}^2 + r_{02}^2 + 2r_{12}r_{02} \cos \vartheta'}$ in Annäherung

$$(41) \quad r_{01} = r_{02} + r_{12} \cos \vartheta'$$

Ferner ergibt sich unter Benutzung der Laueschen Bedingungen:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial r_{21}^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial r_{21} \partial \vartheta'} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial r_{21} \partial \varphi'} \right)_0 = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \vartheta'^2} \right)_0 = \frac{\omega_0}{v_0} r_{21}, \\ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi'^2} \right)_0 = \frac{\omega_0}{v_0} r_{21} \sin^2 \vartheta'_0, \\ \left(\frac{\partial^3 S}{\partial r_{21}^3} \right)_0 = \left(\frac{\partial^3 S}{\partial r_{21} \partial \vartheta' \partial \vartheta'} \right)_0 = 0, \\ \left(\frac{\partial^3 S}{\partial r_{21} \partial \vartheta'^2} \right)_0 = \frac{\omega_0}{v_0}, \\ \left(\frac{\partial^3 S}{\partial r_{21} \partial \varphi'^2} \right)_0 = \frac{\omega_0}{v_0} \sin^2 \vartheta'_0. \end{array} \right.$$

Dann wird:

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = S_0 + \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{v_0} \{ \Delta \vartheta'^2 + \sin^2 \vartheta'_0 \Delta \varphi'^2 \} \{ r_{21} + \Delta r_{21} \} \\ \quad + \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \{ S_0 - (b_m r_{21}) \} \end{array} \right.$$

und dieser Ausdruck läßt sich wieder unter Benutzung der Laueschen Bedingungen schreiben:

$$(43a) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{\omega_0}{v_0} r_{02} \cos \vartheta'_0 + \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{v_0} \{ \Delta \vartheta'^2 + \sin^2 \vartheta'_0 \Delta \varphi'^2 \} r_{21} \\ \quad - (b_m r_{21}) \frac{\Delta \omega}{\omega_0}. \end{array} \right.$$

Kürzen wir nunmehr ab:

$$(44) \quad K_m = \int \frac{e^{-\frac{i}{2} \frac{\omega_0}{v_0} \{ \Delta \vartheta'^2 + \sin^2 \vartheta'_0 \Delta \varphi'^2 \} r_{21}}}{r_{21}} e^{+i(b_m r_{21}) \frac{\Delta \omega}{\omega_0}} d V_1,$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}'_m &= \frac{\tilde{\mathfrak{Z}}_0}{4\pi} \eta_m e^{i\omega \left(t - \frac{(r_{02} \mathfrak{R}_0)}{v_0} \right)} K_m, \\ \psi'_m &= -\omega^2 \frac{F_0}{4\pi} a_m e^{i\omega \left(t - \frac{(r_{02} \mathfrak{R}_0)}{v_0} \right)} K_m. \end{aligned}$$

Wir setzen $(\lambda_0$ die zu ω_0 gehörige Wellenlänge $\frac{2\pi v_0}{\omega_0})$:

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{2r_{21}}{\lambda_0}} \Delta \vartheta' = \mu', \quad \sqrt{\frac{2r_{21}}{\lambda_0}} \sin \vartheta_0' \Delta \varphi' = \nu', \\ dV_1 = \frac{\lambda_0}{2} r_{21} dr_{21} d\mu' d\nu' \end{array} \right.$$

und haben nur noch das Integral

$$(46) \quad K = \frac{\lambda_0}{2} \iint e^{-i\frac{\pi}{2}(\mu'^2 + \nu'^2)} d\mu' d\nu' \int e^{+i\frac{A\omega}{\omega_0}(b_m r_{21})} dr_{21}$$

auszuwerten. Die Integrale nach μ' und ν' treten in der Beugungstheorie auf und sind durch die sogenannte Cornu-sche Spirale dargestellt. Wegen des sehr kleinen Wertes von λ_0 nehmen μ' und ν' große Werte an, schon für mäßige Werte von $\Delta \vartheta'$ an $\Delta \varphi'$. Für einigermaßen große Werte der Integrationsgrenzen schwanken aber diese Integrale um den Wert

$$(47) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}\mu'^2} d\mu' = 1 - i.$$

Aus diesem Grunde können wir das Integral zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ erstrecken, ohne daß dadurch eine unzulässige Ausdehnung der Gültigkeit unserer Taylorentwicklung gefordert würde. Dann wird zunächst

$$(48) \quad K_m = -i\lambda_0 \int e^{i\frac{A\omega}{\omega_0}(b_m r_{21})} dr_{21}.$$

Wenn wir weiter

$$(49) \quad + \cos(b_m r_{21}) = \gamma_m$$

setzen und unter \bar{r}_{21} und \tilde{r}_{21} die Integrationsgrenzen von r_{21} verstehen, erhalten wir schließlich:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}'_m = -\frac{\mathfrak{F}_0}{4\pi} \eta_m \frac{\lambda_0}{\frac{A\omega}{\omega_0} |b_m| \gamma_m} e^{i\omega \left(t - \frac{(r_{21} \eta_m)}{v_0}\right)} \\ \cdot \left\{ e^{i\frac{A\omega}{\omega_0}(b_m \tilde{r}_{21})} - e^{i\frac{A\omega}{\omega_0}(b_m \bar{r}_{21})} \right\} \\ \psi'_m = +\omega^2 \frac{F_0}{4\pi} a_m \frac{\lambda_0}{\frac{A\omega}{\omega_0} |b_m| \gamma_m} e^{i\omega \left(t - \frac{(r_{21} \eta_m)}{v_0}\right)} \left\{ \dots \right\}. \end{array} \right.$$

Beobachten wir innerhalb des Körpers, so ist $\bar{r}_{21} = 0$ und wir erhalten

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}'_m = -\frac{\mathfrak{F}_0}{4\pi} \eta_m \frac{\lambda_0}{\frac{4\omega}{\omega_0} |b_m| \gamma_m} e^{i\omega(t - \frac{(\mathfrak{r}_{02} \mathfrak{R}_0)}{v_0})} \\ \cdot \left\{ e^{i\frac{4\omega}{\omega_0} (b_m \mathfrak{r}_{21})} - 1 \right\} \end{array} \right.$$

und einen analogen Ausdruck für ψ'_m . In der Strahlungszone findet man nun nach Formel (22) für die gebeugte elektrische Feldstärke im Beobachtungspunkte (2):

$$(52) \quad \mathfrak{E}'_m = -\mathfrak{F}'_0 \frac{\frac{\eta_m}{\mathfrak{F}_0} \frac{\omega_0}{v_0}}{2 \frac{4\omega}{\omega_0} |b_m| \gamma_m} e^{i\omega(t - \frac{(\mathfrak{r}_{02} \mathfrak{R}_0)}{v_0})} \left\{ e^{i\frac{4\omega}{\omega_0} (b_m \mathfrak{r}_{21})} - 1 \right\},$$

wobei \mathfrak{F}'_0 diejenige Komponente von \mathfrak{F}_0 bedeutet, welche auf \mathfrak{N} senkrecht steht.

III. Zweite Näherung

Auf diese Weise haben wir also die einmal im Körper gestreuten Strahlen gefunden. Die einfallende Welle wird dabei als konstant angenommen, also in erster Näherung nicht modifiziert. Unsere Fragestellung geht nun aber gerade dahin, den Einfluß der Gitterstruktur auf die Ausbreitung der einfallenden Welle zu diskutieren. Wir müssen also die zweite Näherung in Betracht ziehen, also diejenigen Strahlen diskutieren, die durch eine nochmalige Streuung aus den abgebeugten Wellen hervorgehen. Diejenigen dieser zweimal gestreuten Strahlen, welche die gleiche Richtung wie die einfallende Welle haben, geben uns dann den gesuchten Einfluß der Materiestruktur. Wir wenden uns daher zur Berechnung der zweiten Näherung. Der Punkt (2) liegt jetzt innerhalb des Körpers, innerhalb eines Volumenelementes dV_2 . Wir kennen dann die Wellenfunktion in erster Näherung in dV_2 .)

Dann haben wir im wesentlichen dieselben Betrachtungen wie oben anzuwenden. Fig. 3 stellt die geometrischen Verhältnisse dar. Beobachtet wird im Punkt (3). Die Bedeutung der Vektoren \mathfrak{r}_{hk} ist aus der Figur ersichtlich.

Da jetzt der Punkt (3) im Raum fest ist, während unter dV_2 nacheinander jedes Volumenelement des Körpers ver-

1) Daß wir auch in diesem Falle die Krümmung der Wellenfront der einfallenden Welle vernachlässigen können, hängt damit zusammen, daß nur ein sehr enger Kegel um die durch die Lauesche Bedingung gegebene Richtung herum einen Beitrag in (2) liefert.

standen werden kann, beziehen wir jetzt die Funktion $\eta(x y z)$ auf (3) als Nullpunkt. Wir setzen daher:

$$(53) \quad \eta = \sum \eta'_m e^{-i(b_m \cdot r_{3h})}, \quad \eta'_m = \eta_m e^{+i(b_m \cdot r_{32})},$$

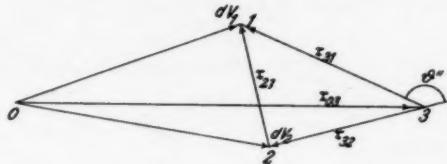


Fig. 3. Zweimalige Streuung. Beobachter in 3

wenn r_{3h} der vom Punkt (3) zu einem beliebigen Punkt h gezeigte Vektor ist, in dem η genommen werden soll. Mit Hilfe der Laueschen Bedingung ergibt sich:

$$\eta_m e^{i\omega \frac{(r_{32} \cdot \mathfrak{R}_0)}{v_0}} = \eta'_m e^{-i\omega \left(\frac{(r_{32} \cdot \mathfrak{R}_0)}{v_0} \right)} e^{-i\omega \frac{(r_{31} \cdot \mathfrak{R}_0)}{v_0}} + i \frac{d\omega}{\omega_0} (b_m \cdot r_{32}).$$

Entsprechend führen wir a'_m ein.

Zur Abkürzung setzen wir noch:

$$(54) \quad \mathfrak{F}'_0 e^{-i\omega \frac{(r_{32} \cdot \mathfrak{R}_0)}{v_0}} = \mathfrak{F}'; \quad F_0 e^{-i\omega \frac{(r_{32} \cdot \mathfrak{R}_0)}{v_0}} = F.$$

Ist \bar{r}_{31} der Wert von r_{31} , der dem Grenzwert \bar{r}_{21} entspricht, so erhält man im Punkt (2):

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}' = -\mathfrak{F}' e^{i\omega t} \frac{\frac{\eta'_m}{s_0} \frac{\omega_0}{v_0}}{2 \frac{d\omega}{\omega_0} |b_m| \gamma_m} e^{-i\omega \frac{(r_{32} \cdot \mathfrak{R}_0)}{v_0}} \\ \quad \cdot \left\{ e^{i \frac{d\omega}{\omega} (b_m \cdot \bar{r}_{31})} - e^{i \frac{d\omega}{\omega_0} (b_m \cdot r_{32})} \right\} \\ \psi' = + \omega^2 F e^{i\omega t} \frac{a'_m \lambda_0}{4\pi \frac{d\omega}{\omega_0} |b_m| \gamma_m} e^{-i\omega \frac{(r_{32} \cdot \mathfrak{R}_0)}{v_0}} \left\{ \dots \right\}. \end{array} \right.$$

Nun sind in (21), (29) \mathfrak{E}' und ψ' zur Zeit $t - \frac{r}{v_0}$ zu nehmen. Da $r_{32} = -(\mathfrak{R}', r_{32})$ wegen $\mathfrak{R}' \parallel r_{32}$ ist, so findet man schließlich für die Zusatzglieder zweiter Näherung:

$$(56) \quad \begin{cases} \mathfrak{Z}'' = \sum_h \sum_m \mathfrak{Z}_{m h}'' , & \psi'' = \sum_h \sum_m \psi_{m h}'' , \\ \mathfrak{Z}_{m h}'' = - \tilde{\mathfrak{D}}' e^{i \omega t} \frac{\eta_m' \eta_h' \frac{\omega_0}{\omega_0 v_0}}{8 \pi \frac{A \omega}{\omega_0} |b_m| \gamma_m} K_h' , \\ \psi_{m h}'' = - \omega^4 F e^{i \omega t} \frac{a_m' a_h' \lambda_0}{(4 \pi^2) \frac{A \omega_0}{\omega_0} \cdot |b_m| \gamma_m} K_h' . \end{cases}$$

Hierin ist gesetzt:

$$(57) \quad \begin{cases} K_h' = \iiint e^{i(\mathfrak{r}_{32}, \{\mathfrak{R}'' - \mathfrak{R}_0'\} \frac{\omega}{v_0} - b_h)} \left\{ e^{i \frac{A \omega}{\omega_0} (b_m \bar{r}_{31})} \right. \\ \left. - e^{i \frac{A \omega}{\omega_0} (b_m r_{32})} \right\} r_{32} dr_{32} \sin \vartheta_0'' d \vartheta'' d \varphi'' . \end{cases}$$

Wir gehen nun ganz ähnlich vor wie bei Berechnung der ersten Näherung. Indem man jetzt genau wie früher

$$\left(\frac{\omega_0}{v_0} (\mathfrak{R}'' - \mathfrak{R}_0) - b_m, \bar{r}_{31} \right)$$

in eine Taylorsche Reihe entwickelt (denn jetzt liegt das Volumenelement dV_2 nicht fest) und die Abkürzungen einführt:

$$\sqrt{\frac{2r_{32}}{\lambda_0}} d\vartheta'' = \mu'' \sqrt{\frac{2r_{32}}{\lambda_0}} \sin^2 \vartheta_0'' d\varphi'' = \nu'', \quad \omega - \omega_0' = A' \omega,$$

so ergibt sich wegen

$$\frac{A' \omega}{\omega_0} (\mathfrak{R}_0'' - \mathfrak{R}_0) \frac{\omega_0'}{v_0} = \frac{A' \omega}{\omega_0'} (b_m \bar{r}_{32})$$

für K_h' der Ausdruck

$$(58) \quad \begin{cases} K_h' = - i \lambda_0 \int_{r_{32}}^{\bar{r}_{32}} e^{i \frac{A' \omega}{\omega_0'} (b_m \bar{r}_{32})} \\ \cdot \left\{ e^{i \frac{A \omega}{\omega_0} (b_m \bar{r}_{31})} - e^{i \frac{A \omega}{\omega_0} (b_m r_{32})} \right\} dr_{32} . \end{cases}$$

Ohne Kenntnis der Gestalt des Körpers ist dieses Integral nicht weiter auszuführen, da \bar{r}_{31} noch von r_{32} abhängen kann. Wir wollen jetzt speziell die Rückwirkung des Streuvorganges auf die einfallende Welle untersuchen. Es sollen also

$$\mathfrak{R}_0'' = \mathfrak{R}_0 \quad \omega_0 = \omega_0'$$

sein. Es gilt die Beziehung

$$\frac{\omega_0}{v_0} (\mathfrak{R}_0' - \mathfrak{R}_0) = b_m .$$

Hierzu kommt jetzt

$$\frac{\omega_0}{v_0} (\mathfrak{N}_0'' - \mathfrak{N}_0') = b_h$$

und hieraus ergibt sich

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_m = -b_h = b_{-h} \\ m = -h. \end{array} \right.$$

In diesem Falle erhalten wir für K'_h :

$$(60) \quad K'_h = i \lambda_0 (\bar{r}_{32} - \bar{r}_{32}) - i \lambda_0 \int_{r_{32}}^{\bar{r}_{32}} e^{i \frac{A \omega}{\omega_0} (b_m \bar{r}_{32} - r_{32})} dr_{32}.$$

Um das Integral ausführen zu können, müssen wir nunmehr unsere Betrachtungen spezialisieren.

IV. Durchgang der Wellen durch eine Kristallplatte

Wir wollen annehmen, daß aus der einfallenden Welle nur ein einziger gebeugter Strahl (m) entsteht, für den die Lauesche Bedingung erfüllt ist.

Wir denken uns die Platte so geschnitten, daß die Plattennormale $\parallel b_{-m}$ weist. Die Richtung dieser Normalen wählen wir als Z -Achse und rechnen sie positiv in der Richtung der einfallenden Welle.¹⁾

Weiter wollen wir annehmen, daß die Platte eine ganze Anzahl von Lamellen enthält. Wenn also wieder die Platte zwischen den beiden Größen $Z = -D$ und $Z = 0$ liegt, so soll an den Grenzen der Ausdruck

$$(61) \quad \eta'_m e^{-i(b_m r_{32})} + \eta_{-m} e^{-i(b_{-m} r_{32})}$$

verschwinden. Setzen wir

$$(62) \quad \eta'_m = -\eta'_{-m} \quad \text{bzw.} \quad a'_m = -a'_{-m},$$

so wird jener Ausdruck

$$(63) \quad \eta'_{-m} 2i \sin(b_m r_{32})$$

und erfüllt in der Tat diese Bedingung. Wenn wir von einer Absorption absehen, so sind $\epsilon(x y z)$ und $a(x y z)$ reelle Größen. Daraus ergibt sich, daß η'_m und η_{-m} rein imaginäre Größen sind. Und das gleiche gilt für die a'_m . Es gilt also:

$$(64) \quad \eta'_{-m} \eta'_m = |\eta'_m|^2 \quad \text{und} \quad a'_m a'_{-m} = |a'_m|^2.$$

Ferner gilt für den Winkel:

$$\not \prec(b_m r_{32}) = \not \prec(-Z, -\mathfrak{N}) = \not \prec(Z, \mathfrak{N}),$$

also

$$\not \prec(b_{-m}, r_{32}) = \not \prec(+Z, -\mathfrak{N}_0'') = \not \prec(+Z, -\mathfrak{N}_0)$$

1) m ist dann nach (40) eine negative Zahl.

und daher folgt für

$$(65) \quad (b_m, \mathbf{r}_{32}) = + |b_m| |\mathbf{r}_{32}| \cdot \gamma_0,$$

wenn wir den Einheitsvektoren $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_0''$ und \mathfrak{R}_0' ihre Richtungskosinus gegen $x y z$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_0 & \alpha_0 \beta_0 \gamma_0 \\ \mathfrak{R}_0' & \alpha_0' \beta_0' \gamma_0' \end{aligned}$$

als Komponenten zuordnen. Liegt die einfallende Welle in der XZ -Ebene, so ist $\beta_0 = 0$. Da $b_{mz} = 0$ ist, so folgt auch $\beta_0' = 0$. Aus der Lauebedingung ergibt sich dann weiter wegen $b_{mx} = 0$

$$\alpha_0' = \alpha_0$$

also

$$\gamma_m \gamma_0' = \pm \gamma_0$$

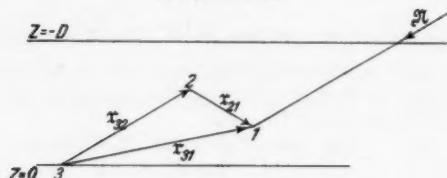


Fig. 4

und da der gebeugte Stahl nicht dieselbe Richtung wie der einfallende haben kann, also $\gamma_0' = -\gamma_0$ sein muß, liefert die 3te Bedingung:

$$(66) \quad -2 \frac{\omega_0}{v_0} \gamma_0 = b_{mx}.$$

Nunmehr berechnen wir den in Gl. (60) auftretenden Exponenten. Es ist nach Fig. 4 $(\bar{\mathbf{r}}_{31})_z = 0$, da $\bar{\mathbf{r}}_{31}$ einen Punkt in der Ebene $z = 0$ definiert. Daher wird:

$$(b_m, \bar{\mathbf{r}}_{31} - \mathbf{r}_{32}) = - (b_m \mathbf{r}_{32}) = - |b_m| \mathbf{r}_{32} \cdot \gamma_0.$$

Da $\bar{\mathbf{r}}_{32} = 0$, $\bar{\mathbf{r}}_{32} = \frac{D}{\gamma_0}$ ist, wird (60):

$$(67) \quad K_{-m} = i \lambda_0 \frac{D}{\gamma_0} + \frac{\lambda_0}{\frac{D \omega}{v_0} |b_m| \gamma_0} \left\{ e^{-i \frac{D \omega}{\omega_0} |b_m| D} - 1 \right\}.$$

Der durch Gl. (10) eingeführten Größe e , die im Faktor von $a'_m a'_{-m}$ bzw. $\eta'_m \eta'_{-m}$ sich $e = e^{-2i \frac{\omega}{v_0} \gamma_0 D}$ schreiben läßt, können wir eine andere Gestalt geben. Es ist ja

$$e^{-2i \frac{\omega}{v_0} \gamma_0 D} = e^{-2i \frac{\omega_0}{v_0} \gamma_0 D} \cdot e^{-2i \frac{D \omega}{v_0} \gamma_0 D}$$

und da $-2 \frac{\omega_0}{v_0} \gamma_0 = b_m$ ist und weiter die Schicht eine ganze Zahl q von Lamellen enthält, also nach (32) $b_m \cdot D = q \cdot 2\pi$ sein soll, so wird

$$(68) \quad e^{-2i \frac{\omega}{v_0} \gamma_0 D} = e^{+i \frac{4\omega}{\omega_0} b_m D} = e^{-i \frac{4\omega}{\omega_0} |b_m| D},$$

da b_m bei positivem γ_0 negativ ist.

So nehmen schließlich die zweiten Näherungen die Gestalt an: ($\gamma_0 = -\gamma_m$)

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}_{m,-m}'' = + \mathfrak{F}' e^{i\omega t} \frac{\eta'_m \eta'_{-m} \frac{\omega_0}{v_0}}{8\pi \frac{4\omega}{\omega_0} |b_m| \gamma_0} \\ \quad \cdot \left[\frac{i \lambda_0 D}{\gamma_0} + \frac{\lambda_0}{\frac{4\omega}{\omega_0} |b_m| \gamma_0} \{e - 1\} \right], \\ \psi_{m,-m}'' = + \omega^4 F e^{i\omega t} \frac{a'_m a_{-m} \lambda_0}{(4\pi)^2 \frac{4\omega}{\omega_0} |b_m| \gamma_0} [\dots]. \end{array} \right.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man:

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_{m,-m}'' = + \mathfrak{E}'' e^{i\omega t} \frac{\eta'_m \eta'_{-m} \frac{\omega_0^2}{v_0^2}}{4 \frac{4\omega}{\omega_0} |b_m| s_0^2 \gamma_0^2} \\ \quad \cdot \left[iD + \frac{1}{\frac{4\omega}{\omega_0} |b_m|} [e - 1] \right]. \end{array} \right.$$

Hierin ist \mathfrak{F}'' diejenige Komponente von \mathfrak{F}' , welche auf $\mathfrak{N}_0'' = \mathfrak{N}_0$ senkrecht steht. Offenbar ist für die in der XZ -Ebene liegende Komponente (Index p):

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\mathfrak{F}_p'| = |\mathfrak{F}_p| \cdot \cos 2\varphi = (\gamma_0^2 - \alpha_0^2) |\mathfrak{F}_p| \\ |\mathfrak{F}_p''| = |\mathfrak{F}_p| \cdot \cos 2\varphi = (\gamma_0^2 - \alpha_0^2)^2 |\mathfrak{F}_p| = (1 - 2\alpha_0^2)^2 |\mathfrak{F}_p|, \end{array} \right.$$

da der Winkel zwischen \mathfrak{N}_0 und \mathfrak{N}' , also auch zwischen $\mathfrak{E}^{(0)}$ und \mathfrak{E}' gleich dem doppelten Einfallswinkel φ ist. Für die senkrecht zur Einfallsebene schwingende Konstante (Index s) gilt einfach:

$$(71a) \quad |\mathfrak{F}_s''| = |\mathfrak{F}_s|.$$

Wir wollen nun zunächst die hier gewonnenen Formeln mit den in der Einleitung zusammengestellten vergleichen.

Mit Hilfe von (66) lässt sich schreiben $|b_m| = 2 \frac{\omega_0}{v_0} \gamma_0$.

$$(72) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}'_{m, -m} = + \mathfrak{F}'' e^{i \omega t} \frac{|\eta'_m|^2}{8 \frac{d \omega}{\omega_0} n_0^4 \gamma_0^2} \\ \quad \cdot \left\{ i \frac{\omega_0}{v_0} D + \frac{1}{2 \frac{d \omega}{\omega_0} \gamma_0} [e - 1] \right\} \end{array} \right.$$

Die gesamten durch die Platte durchgegangenen Wellen bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_d = \mathfrak{E}^0 + \mathfrak{E}'_{m, -m}$. Bedeuten die beiden Konstanten c_1 und c_2 leicht ersichtliche Abkürzungen, so läßt sich schreiben, da in (52): $\mathfrak{F}' = \{\mathfrak{F}'_0\}_{Z=-D} e^{-i \omega \gamma_0 \frac{D}{v_0}}$ ist,

$$(73) [\mathfrak{E}_d]_{Z=0} = [\mathfrak{E}^0]_{Z=-D} e^{-i \frac{\omega}{v_0} \gamma_0 D} \left\{ 1 + c_1 i \frac{\omega_0}{v_0} D + c_1 c_2 [e - 1] \right\}.$$

Oder wenn man die Entwicklung der e -Funktion $e^x = 1 + x$ heranzieht:

$$(72a) [\mathfrak{E}_d]_{Z=0} = [\mathfrak{E}^0]_{Z=-D} \cdot e^{-i \frac{\omega}{v_0} \{ \gamma_0 + c_1 \} D} \{ 1 + c_1 c_2 [e - 1] \}.$$

Wir betrachten zunächst die Komponente \mathfrak{E}_s .

Nach Gl. (8) ist nun

$$(\zeta')_{Z=0} = + i \frac{\omega}{c} \eta_0 \frac{1}{b - 2 \frac{\omega}{c} \zeta_0} \quad (\zeta^0 = n_0 \gamma_0),$$

wenn wir das zweite Glied in (8) wegen des relativ großen Nenners vernachlässigen. Wenn wir $b = 2 \frac{\omega_0}{v_0} \gamma_0$ setzen, d. h. ω_0 aus dieser Gleichung bestimmen, findet sich:

$$(\zeta')_{Z=0} = + i \frac{\eta_0}{2 \gamma_0 n \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \right)} = - i \frac{\eta_0}{2 \frac{d \omega}{\omega} n_0 \gamma_0}.$$

Daher wird, da η_0^2 unserem jetzigen $|\eta'^2|$ entspricht:

$$c_1 c_2 = - \frac{(\zeta')_{Z=0}^2}{4 n_0^2 \gamma_0^2}.$$

Für den Exponenten der e -Funktion in (72a) ergibt sich:

$$- i \frac{\omega}{v_0} (\gamma_0 - c_1) = - i \frac{\omega}{v_0} \gamma_0 \left(1 - \frac{|\eta'_m|^2}{8 \frac{d \omega}{\omega} \gamma_0^4 n_0^4} \right).$$

Andererseits wird der Exponent von e' nach (14):

$$-i \frac{\omega}{v_0} \gamma_0 \left\{ 1 + \frac{|\eta_m|^2 \frac{\omega^2}{c^2}}{n_0 \gamma_0 \zeta^{(0)} \left(b^2 - 4 \frac{\omega^2}{c^2} \zeta_0^2 \right)} \right\}$$

$$= -i \frac{\omega}{v_0} \gamma_0 \left\{ 1 - \frac{|\eta'_m|^2}{8 \frac{A \omega}{\omega_0} n_0^4} \right\}.$$

Die Formeln (72) und (14) führen also zu demselben Ausdruck für \mathfrak{E}_s . Aus (71) folgt das gleiche für \mathfrak{E}_p . Die neue Ableitung ist allgemeiner, da sie die Stelle $\omega = \omega_0$ mit umfaßt; hier war die frühere Entwicklung nicht konvergent, während unsere jetzige brauchbar bleibt, wenn die Dicke der Platte nicht zu groß ist. Umgekehrt haben wir jetzt vorausgesetzt, daß $D \cdot \frac{|\eta'|^2}{\frac{A \omega}{\omega_0} \cdot \gamma_0^3}$ klein bleibt, während wir das gleiche

früher nur für den Faktor von D anzunehmen brauchten!¹⁾

Wir wollen uns aber für den Augenblick auf den Fall, daß $\omega \neq \omega_0$ ist, beschränken. Das Glied mit dem Faktor $[e - 1]$ gibt dann zu Schwankungen der Intensität und Phase Veranlassung, deren Größe von D unabhängig ist. Für große Werte von D wird also die Phase durch den Faktor e' be-

1) Wir zeigen noch, daß unsere Formeln dem Prinzip von der Erhaltung der Anzahl der Elektronen bzw. der Energie genügen. Für $\gamma_0 = 1$ folgt aus (50), (56) und (67), indem man wieder das Glied mit dem Faktor iD in den Exponenten nimmt:

$$|\psi'_m|^2 = |F_0|^2 \left(\frac{\omega^2 |a'_m| \lambda_0}{4\pi \frac{A \omega}{\omega_0} |b_m|} \right)^2 \left| e^{-i \frac{A \omega}{\omega_0} |b_m| D} - 1 \right|^2$$

$$|1 + \psi''_{m, -m}|^2 = |F_0|^2 \left| 1 + 2 \cdot \frac{\omega^4 |a'_m|^2 \lambda_0^2}{(4\pi)^2 \left(\frac{A \omega}{\omega_0} \right)^2 |b_m|^2} [e - 1] \right|^2.$$

Da der reelle Teil von

$$e - 1 = -\sin^2 \left(\frac{A \omega}{\omega_0} |b_m| D \right) \quad \text{und} \quad |e^{-i \alpha} - 1|^2 = 2 \sin^2 \alpha$$

ist, so folgt:

$$|1 + \psi''_{m, -m}|^2 = 1 - |\psi'_m|^2$$

und analoge Gleichungen für die elektromagnetischen Größen. Die letzte Gleichung drückt das gesuchte Prinzip aus.

stimmt. Wenn wir diese kleinen Schwankungen vernachlässigen und den Mittelwert bilden, so findet man für \mathfrak{E}_p

$$(73) \quad [\mathfrak{E}_{s.d.}]_{s=0} = [\mathfrak{E}_s^{(0)}]_{s=-D} e^{-i \frac{\omega}{c} n_0 \gamma_0 \left(1 - \frac{|\eta'_m|^2}{8 \frac{D \omega}{\omega_0} n_0^4 \gamma_0^4} \right) D}.$$

Geht das Licht speziell senkrecht durch die Schicht hindurch, wie es bei Kirillow der Fall war, so wird die Phase des durchgegangenen Lichtes durch den mittleren Brechungsindex:

$$(74) \quad \bar{n} = n_0 \left(1 - \frac{|\eta'_m|^2}{8 n_0^4 \frac{D \omega}{\omega_0}} \right)$$

bestimmt. Für $\omega < \omega_0$ ist $\bar{n} > n_0$, während für $\omega > \omega_0$ $\bar{n} < n_0$ ist. \bar{n} verhält sich also ähnlich wie der Brechungsindex im Gebiet der anomalen Dispersion. Eine solche Analogie zeigten nach Fig. 1 auch die Beobachtungen von Kasterin.

Wir wollen nunmehr noch das Verhalten der gestreuten Welle in der Nähe von $\omega = \omega_0$ betrachten. Wir entwickeln den Ausdruck $(e - 1)$ in eine Taylorsche Reihe.

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} e - 1 = e^{-i \frac{D \omega}{\omega_0} |b_m| D} - 1 \\ \quad = -\frac{D \omega}{\omega_0} |b_m| \left\{ i D + \frac{1}{2} \frac{D \omega}{\omega_0} |b_m| D^2 \right\}. \end{array} \right.$$

Dann wird die Klammer in (69):

$$-\frac{\lambda_0}{\gamma_0} \frac{1}{2} \frac{D \omega}{\omega_0} |b_m| D^2$$

und (69) und (70) gehen über in:

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi''_{m, -m} = -\omega^4 F e^{i \omega t} \frac{|\eta'_m|^2 \lambda_0^3}{|4 \pi|^2 \gamma_0^2} D^2 \\ \mathfrak{C}_{m, -m}'' = -\tilde{\mathfrak{C}}'' e^{i \omega t} \frac{|\eta'|^2 \frac{\omega_0^2}{v_0^2}}{4 \epsilon_0^2 \gamma_0^2} D^2. \end{array} \right.$$

Der Faktor von $F e^{i \omega t}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{C}}'' e^{i \omega t}$ ist reell. Er bedingt also keine Änderung der Phase der gestreuten Amplitude gegenüber der einfallenden Amplitude, sondern nur der Intensität, und zwar ist diese proportional D^2 . Bei einmaliger Streuung ist nämlich die (bei Gültigkeit der Lauebedingungen) gestreute Amplitude proportional der Zahl der streuenden Mole-

küle, bei zweimaliger dem Quadrat dieser Zahl, und die Zahl der streuenden Moleküle ist in unserem Falle proportional D . Die Geschwindigkeit, mit der also im Braggschen Falle die Fläche konstanter Phase fortschreitet, ist in unserer Annäherung die gleiche, wie wenn die Gitterstruktur überhaupt nicht vorhanden wäre. Man sieht aus den letzten Überlegungen, daß das Glied mit dem Faktor $[1 - e]$ eine wesentliche Rolle spielt, da das mit ihm behaftete Glied das Endlichbleiben von \mathcal{E}'' bzw. ψ'' erzwingt. Entfernen wir uns nur sehr wenig von der Stelle $\omega = \omega_0$, so erfolgen die durch den Faktor bedingten Schwankungen außerordentlich langsam und der Faktor $(e - 1)$ ist gerade hier sehr groß. Man kann dann, selbst wenn man über relativ große Strecken mittelt, nicht von einem bestimmten Brechungsindex reden.

V. Phasengeschwindigkeit innerhalb des Kristalls

Wir wollen jetzt wieder annehmen, daß wir uns in einiger Entfernung von der Stelle $\omega = \omega_0$ befinden. Wir müssen nun

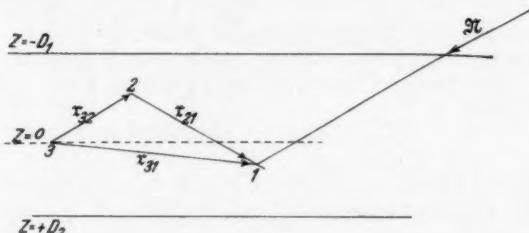


Fig. 5

noch untersuchen, ob wir auch innerhalb der Platte von einem mittleren Brechungsindex sprechen können. Der Punkt $z = 0$ liege also jetzt im Innern der Platte. Die Grenzen der Platte seien $z = -D_1$ und $z = +D_2$. An Stelle von (63) tritt dann im allgemeinen ein Ausdruck von der Form:

$$\eta'_m e^{-i(b_m r_{3h})} + \eta'_{-m} e^{-i(b_{-m} r_{3h})}$$

der mit der Festsetzung:

$$\eta'_m = \frac{1}{i} |\eta'_m| e^{-i(\delta + \pi)} \quad \eta'_{-m} = \frac{1}{i} |\eta'_m| e^{+i\delta} \quad \eta'_m \eta'_{-m} = |\eta'_m|^2$$

übergeht in:

$$2 |\eta'_{-m}| \sin \{(b_m, r_{3h}) + \delta\}.$$

Die Forderung, daß die Schicht aus einer ganzen Zahl von Lamellen besteht, führt zu den Beziehungen:

$$\delta = 2\bar{n}k - |b_m|D_1 = 2\pi j + |b_m|D_2 \\ (k \text{ und } j \text{ ganze Zahlen}).$$

Entsprechendes gilt für die a_m' .

Ferner sind jetzt die Integrationsgrenzen in (60) analog:

$$\bar{r}_{32} = 0 \quad \bar{r}_{33} = \frac{D_1}{\gamma_0}$$

aber es ist

$$\bar{r}_{31} = \frac{D_2}{\gamma_0}.$$

Daher wird der zweite Term in (60):

$$-i\lambda_0 e^{-i\frac{A\omega}{\omega_0} + b_m |D_1|} \int_0^{D_1/\gamma_0} e^{-i\frac{A\omega}{\omega_0} (b_m \bar{r}_{32})} d\bar{r}_{32},$$

während der erste Term ungeändert bleibt.

Abgesehen davon, daß an Stelle von D jetzt D_1 steht, besteht der einzige Unterschied gegen früher darin, daß statt $[e - 1]$ jetzt

$$e^{-i\frac{A\omega}{\omega_0} + b_m |D_2|} [e - 1]$$

auftritt.

Sei \bar{r}_{02} der Vektor von der Lichtquelle bis zu einem Punkt der Plattengrenze $z = -D_1$, \bar{r} der Vektor von diesem Punkt bis zum Beobachterpunkt $[\bar{r}_z = D_1]$, so ist

$$(77) \quad \tilde{\mathfrak{F}} = \tilde{\mathfrak{F}}_0 e^{-i\omega \frac{(\bar{r}_{02} \cdot \bar{r}_0)}{v_0}} e^{-i\omega \frac{(\bar{r} \cdot \bar{r}_0)}{v_0}} = \tilde{\mathfrak{F}}_0 e^{-i\omega \frac{(\bar{r} \cdot \bar{r}_0)}{v_0}}$$

und Analoges gilt für ψ . $\tilde{\mathfrak{F}}$ und $\tilde{\mathfrak{F}}$ sind dann die entsprechenden Werte beim Eintritt in die Platte.

Wir legen nunmehr den Nullpunkt des Koordinatensystems in die dem einfallenden Licht zugekehrte Plattengrenze; dann ist $D_1 = z$.

Wenn wir wieder von den durch $[e - 1]$ bedingten Schwankungen absehen, also den Mittelwert über eine hinreichende Größenstrecke bilden, finden wir für diejenige Feldstärke, die sich in der Richtung der einfallenden Wellen-normalen fortpflanzt, an der Stelle z

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\mathfrak{E}_s]_s = \bar{\mathfrak{E}}_1 e^{-i\omega \left[\frac{a_0 x}{v_0} + \frac{\gamma_0}{v_0} \left\{ 1 - \frac{|\eta'_m|^2}{8 \frac{A\omega}{\omega_0} n_0^4 \gamma_0^4} \right\} z \right]} \\ \text{und entsprechend} \\ [\psi]_s = \bar{\psi} e^{-i\omega \left[\frac{a_0 x}{v_0} + \frac{\gamma_0}{v_0} \left\{ 1 - \frac{\omega^2 |a'_m|^2 \lambda_0^2 v_0}{2(4\pi)^2 \frac{A\omega}{v_0} \gamma_0^4} \right\} z \right]}. \end{array} \right.$$

Der Exponent der e -Funktion hat die Form:

$$\frac{\alpha_0 x + \gamma_0 (1-g) z}{v_0},$$

wo g eine Abkürzung bedeutet. Wollen wir ihn auf die normale Form

$$\frac{\alpha x + \gamma(z)}{v}$$

bringen, in der α, γ die Richtungskosinus, v die Phasengeschwindigkeit der Welle bedeuten, so finden wir (g^2 bleibt neben Eins fort):

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{v} = \frac{1-g\gamma_0^2}{v_0} \quad v = \frac{v_0}{1-g\gamma_0^2}, \\ \alpha = \frac{\alpha_0}{1-g\gamma_0^2} \quad \gamma = \frac{\gamma_0(1-g)}{1-g\gamma_0^2}. \end{array} \right.$$

Zum Schluß finden wir:

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Für } \mathfrak{E}: \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} \left(1 - q \frac{|\eta'_m|^2}{8 \frac{A\omega}{\omega_0} n_0^4 \gamma_0^2} \right) \quad q = 1 \text{ für } \mathfrak{E}_s, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad q = [\gamma_0^2 - \alpha_0^2]^2 \text{ für } \mathfrak{E}_p, \\ \text{für } \psi: \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} \left(1 - \frac{|a'_m|^2 \cdot v_0}{8 \frac{A\omega}{\omega_0} \gamma_0^2} \right). \end{array} \right.$$

Wie man sieht, ist die Abweichung von v gegen v_0 um so größer, je schräger das Licht auf die Schichten auffällt. Der Brechungsindex ist für die parallel und senkrecht zur einfallenden Ebene polarisierten Wellen verschieden. Es tritt also Doppelbrechung auf.

VI. Eigenschwingungen

Wir denken uns die Kristallplatte mit vollkommen spiegelnden Grenzflächen versehen. Da seitlich Grenzen fehlen, können Eigenschwingungen nur bei senkrechter Inzidenz auftreten, auf die wir uns im folgenden beschränken. Wir

fragen nun, wann im Innern stehende Wellen auftreten können. Wir wollen die Wellenfunktion mit u bezeichnen, das wir dann mit \mathfrak{U} , \mathfrak{G} oder ψ identifizieren können.

An der Grenze $z = -D$ sei $u = \bar{u}$. Bei $z = 0$ sei $u = \bar{u}$. Im Innern der Platte existieren dann zwei Wellensysteme $\parallel + Z$ und $\parallel - Z$, die wir mit u_1 und u_2 bezeichnen. Sie werden ineinander übergeführt 1. durch Reflexion an den Grenzebenen, 2. durch Streuung an den Schichten. Nach (50) läßt sich die in der Platte gestreute Amplitude, die auf die Grenze $z = -D$ trifft, auf die Form bringen $\sigma \bar{u}_1$ und die entsprechende Amplitude an der Grenze $z = 0$: $\sigma \bar{u}_2$. Andererseits gelangt die von $z = -D$ ausgehende Welle \bar{u}_1 nach (69)

und (70) mit der Stärke $d e^{-i \frac{\omega}{v_0} D} \bar{u}_1$ bei der Grenze $z = 0$ an. (Hierin ist d ebenso wie σ eine leicht ersichtliche Abkürzung). Für die gesamte an der Grenze $z = 0$ ankommende Welle gilt also:

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 = e^{-i \frac{\omega}{v_0} D} \cdot d \cdot \bar{u}_1 + \sigma \bar{u}_2, \\ \bar{u}_2 = e^{-i \frac{\omega}{v_0} D} \cdot d \cdot \bar{u}_1 + \sigma \bar{u}_1. \end{array} \right.$$

Wir wollen annehmen, daß an beiden Grenzen entweder ein Wellenberg oder ein Knoten sein soll, daß also gilt:

$$u_1 = \pm \bar{u}_2 \quad \bar{u}_1 = \pm \bar{u}_2.$$

Dann folgt aus den Gl. (81):

$$(82) \quad (1 \mp \sigma)^2 = e^{-2i \frac{\omega}{v_0} D} \cdot d^2.$$

Wir schließen die unmittelbare Umgebung $\Delta \omega = 0$ zunächst aus. Für $\eta'_m = 0$ bzw. $a'_m = 0$ würde sich die Eigenfrequenz $\bar{\omega}$ aus (82) zu

$$2 \frac{\bar{\omega}}{v_0} D = 2 \pi k \quad k \text{ ganze Zahl}$$

bestimmen. Diesen Näherungswert können wir in den Ausdruck für $d - 1$ nach (69) direkt einsetzen, wenn wir Glieder 3. Ordnung vernachlässigen. Die rechte Seite von (82) wird dann nach (80): $e^{-2i \frac{\omega}{v} D}$. Wir bestimmen weiter $\bar{\omega}$ durch die Beziehung:

$$2 \frac{\bar{\omega}}{v} D = 2 \pi k$$

und setzen $\omega = \bar{\omega} + \Delta$. Da wir in σ bis auf Glieder 3. Ordnung v_0 durch v ersetzen, also $e - 1 = 2i \frac{\Delta}{v} D$ setzen dürfen, so

erkennt man, daß σ reell wird, da a'_m und η'_m nach S. 277 imaginär sind. Da in unserer Näherung $(1 \pm \sigma)^2 = 1 \pm 2\sigma = e^{\pm 2\sigma}$ ist, so würde (82) verlangen

$$\pm 2\sigma = 2i \frac{\omega}{v} D - i 2\pi k,$$

woraus (da σ reell): $\sigma = 0$ und $\frac{\omega}{v} D = \pi k$ folgt; $\bar{\omega}$ ist aber die gesuchte Eigenfrequenz.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des bisher ausgeschlossenen Falles $\Delta\omega = 0$.

Für $\omega = \omega_0$ liefert aber (50)

$$\psi'_m = i F_0 \omega^2 a'_m \lambda_0 D.$$

Es ist also (a'_m imaginär)

$$\sigma \neq 0 \text{ und reell.}$$

Aus (82) ergibt sich:

$$(83) \quad |(1 \mp \sigma)|^2 = |d|^2.$$

Aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie resp. der Anzahl der Elektronen folgt aus der Anmerkung S. 281:

$$|d|^2 = 1 - |\sigma|^2$$

und daher ergibt (82): ($|\sigma| \leq 1$ und reell)

$$|\sigma| |\sigma \mp 2| = |\sigma|^2.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch $\sigma = \pm 1$, da $\sigma \neq 0$ ist. Diese Bedingung sagt aus, daß die von einer Grenze ausgehende Welle die andere Grenze nicht erreicht. Sie wird auf ihrem Wege vollkommen reflektiert. Dies wäre in der Nähe von $\Delta\omega = 0$ möglich. Eine Eigenschwingung im gewöhnlichen Sinne ist aber nicht vorhanden. Damit ist allerdings nicht ohne weiteres gesagt, daß dieser Schwingungszustand physikalisch nicht auftreten kann. Wenn der Körper groß genug ist, so verläuft diese Schwingung ganz im Innern, wird also durch die Grenzen nicht mit bestimmt. Hierdurch unterscheidet er sich von den eigentlichen Eigenschwingungen.

VII. Anwendung auf Elektronenwellen in Kristallen

Für die Schrödingersche ψ -Funktion folgt aus (80) bei senkrechter Inzidenz:

$$(86) \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = - \frac{\omega |a'_m|^2 v_0^2}{8 \Delta\omega}.$$

Nun bedeutet nach (25) a den Ausdruck:

$$a = \frac{2m}{E} - \frac{2m\Phi}{E^2}$$

E ist unabhängig von den Koordinaten. Wir denken uns Φ in eine Fouriersche Reihe entwickelt:

$$(87) \quad \Phi = \sum_m \Phi'_m e^{-i(b_m r_0 \lambda)}.$$

Da weiter $\frac{E_0}{2m} = v_0^2$ ist und wir in dem Ausdruck mit Φ'_m E durch E_0 ersetzen können, gilt die Gleichung:

$$|a'_h|^2 = \left(\frac{2m}{E^2}\right)^2 |\Phi'_h|^2 = \frac{1}{E_0^2 v_0^4} |\Phi'_h|^2.$$

An Stelle der Kreisfrequenz ω führen wir die gewöhnliche Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ und die Wellenlänge $\lambda_0 = \frac{v_0}{\nu_0}$, $\lambda = v/\nu$ ein. Dann lässt sich (86) schreiben: ($\nu = \nu_0 + \Delta\nu$):

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right) = \Delta \frac{1}{\lambda} - \frac{\Delta\nu}{v_0} = \Delta \frac{1}{\lambda} - \frac{\Delta\nu}{v_0 \lambda_0} \\ = - \frac{v_0^2 |\Phi'_m|^2}{8 E_0^2 \Delta\nu \cdot v_0} = - \frac{v_0 |\Phi'^2|}{8 E_0^2 \lambda_0 \Delta\nu}. \end{array} \right.$$

Hieraus findet sich:

$$(89) \quad \Delta\nu = \frac{1}{2} v_0 \lambda_0 \Delta \frac{1}{\lambda} \pm \sqrt{\frac{\nu^2 |\Phi'_m|^2}{8 E_0^2} + \frac{1}{4} \left(v_0 \cdot \lambda_0 \cdot \Delta \frac{1}{\lambda} \right)^2}.$$

Wir wollen nunmehr die auf die Welle bezüglichen Größen, Frequenz und Wellenlänge, durch die korrespondierenden mechanischen Ausdrücke Energie und Impuls p ersetzen. Dann ergibt sich:

$$h\nu = E; \quad \lambda = \frac{h}{p}.$$

$$(90) \quad \Delta E = \frac{1}{2} E_0 \frac{\Delta p}{p_0} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} |\Phi'_m|^2 + E_0^2 \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)^2}.$$

Für $\Delta p = 0$ ergibt sich:

$$(90a) \quad \Delta E = \pm \frac{|\Phi'_m|}{2\sqrt{2}}.$$

Lassen wir p stetig wachsen, so zeigen die zugehörigen Energiewerte eine Lücke bei $p = p_0$ von der Ausdehnung $\frac{|\Phi'_m|}{\sqrt{2}}$. Wenn Φ'_m hinreichend klein ist, so gilt unsere Überlegung bis an die Lücke heran. Denn $\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}$ wird nach (86) dann immer

noch klein von der Größenordnung $|\Phi_m'|$. Die in der Einleitung wiedergegebene Methode der Näherung setzt aber nur die Kleinheit dieses Gliedes voraus.

Zusammenfassung

Wir gingen aus von der von Kasterin beobachteten anomalen Dispersion, welche Lippmannsche Farbenplatten in der Umgebung der Wellenlänge zeigen, mit der sie beleuchtet sind. Der Ausdruck, der diese Beobachtungen theoretisch darstellt, lässt sich für elektro-magnetische Wellen ableiten. Zu ganz analogen Ergebnissen gelangt man, wenn man statt der Maxwellschen Gleichungen die Schrödinger-sche Gleichung für Elektronenwellen zugrunde legt. Geht man von dem Ausdruck für die Wellengeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen zu den ganz entsprechenden für Elektronenwellen über und ersetzt die wellentheoretischen Größen, Frequenz ν und Wellenlänge λ , durch die mechanischen, Energie E und Impuls p , so gelangt man zu einer Abhängigkeit der Energie E von dem Impuls p , welche dem aus der wellenmechanischen Theorie der Leitfähigkeit der Metalle bekannten Ausdruck entspricht. Im besonderen tritt der Zusammenhang der an Lippmannschen Farbenplatten beobachteten anomalen Dispersion mit der aus der Theorie gefolgerten Lücke im Energiespektrum der Elektronenwellen in Metallen zutage.

Köln a. Rh., Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 16. November 1933)

**Über die
Frequenzabhängigkeit des Entladungsbildes
der Wechselstromglimmentladung als Folge
ionischer Nachwirkungen**

Von O. Brandt

(Mit 3 Figuren)

Die Entladungerscheinungen der Wechselstromglimmentladung mit zwei definierten Elektroden sind bei hohen Frequenzen in den grundlegenden Arbeiten von H. Ebert und E. Wiedemann¹⁾ erstmalig beschrieben. Das Entladungsbild ist hier soweit dargelegt, daß einschlägige spätere Arbeiten¹⁾ nichts wesentlich Neues hinzufügen und in der Hauptsache die Gewinnung anderweitiger Resultate im Auge haben. Erst in neuerer Zeit stellte Hiedemann¹⁾ wieder ausgedehnte und systematische morphologische Untersuchungen über das Gebiet an. Der Fortschritt bei ihm besteht in der Verwendung ungedämpfter Wellen. Danach kann man das Gebiet der Hochfrequenzglimmentladung — wenigstens bis zum Gebiet der Kurzwellen — in morphologischer Hinsicht als bekannt ansehen.

Dagegen ist das Gebiet zwischen niederfrequenten (50 Hz) und hochfrequenten Entladungen nur gelegentlich berührt²⁾³⁾, aber nicht bestrichen worden, obgleich, wie im folgenden gezeigt werden soll, eine Frequenzabhängigkeit des Entladungsbildes gerade innerhalb der Tonfrequenzen vorliegt, die erst das Hochfrequenzentladungsbild verständlich macht.

Es ist ohne weiteres klar, daß gerade die Gebiete Aufschlüsse gewähren, in denen die Nachwirkungen der vorangehenden Entladung beginnen, einen Einfluß auf das Entladungsbild der nachfolgenden auszuüben. Auch auf dem verwandten Gebiete der intermittierenden Entladungen gibt bereits Valle⁴⁾

1) Vgl. die Literaturangaben bei E. Hiedemann, Ann. d. Phys. 85. S. 649. 1928.

2) H. Ebert, Wied. Ann. 65. S. 761. 1898.

3) W. Lessing, Diss. Erlangen 1902.

4) G. Valle, Phys. Ztschr. 27. S. 473. 1926; Arch. f. Elektrot. 26. S. 310. 1932.

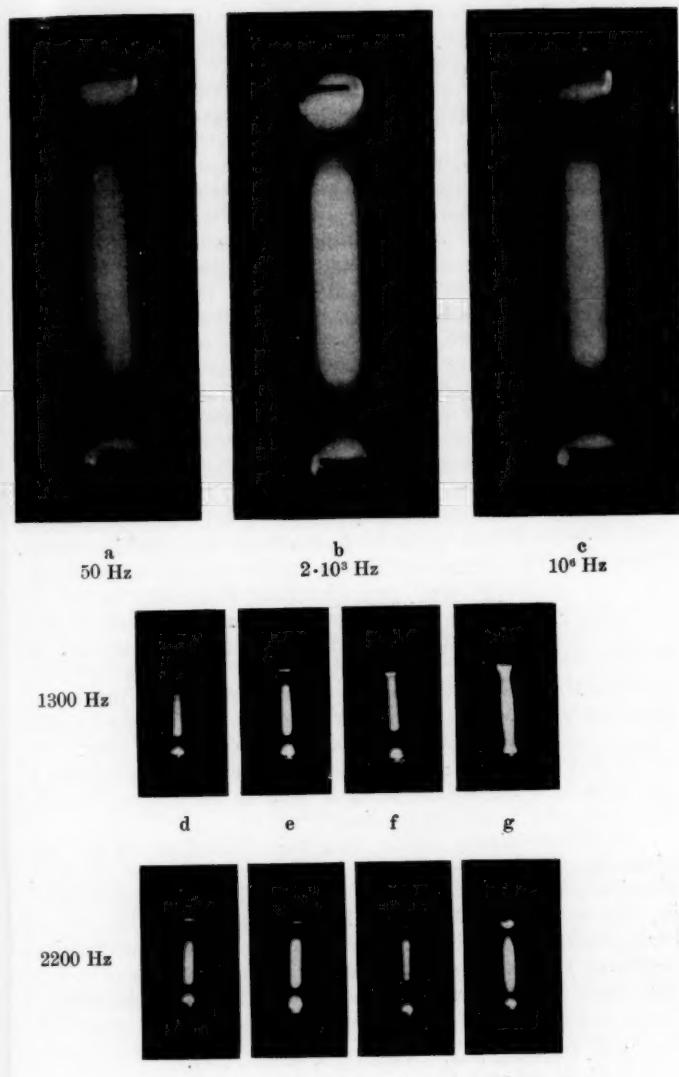


Fig. 1

20*

eine Veränderung des Entladungsbildes unter der Einwirkung von Restladungen an, die im Auftreten einer dunklen Stelle in der „positiven Anfangssäule“ besteht. Auf dem gleichen Gebiet fand Bartelt¹⁾ unter speziellen Verhältnissen eine interessante Veränderlichkeit der positiven Säule in radialer Richtung.

Daß eine Frequenzabhängigkeit des Wechselstromentladungsbildes vorhanden ist, geht ohne weiteres aus den beiden bekannten Endpunkten der Entwicklung hervor. Schon bei niedriger Frequenz ist das Entladungsbild (Fig. 1, a) gegeben durch die im Auge stattfindende physiologische Überlagerung der entgegengesetzten Bilder jeder Phase. Diese unterscheiden sich, wie stroboskopisch festgestellt werden kann, nicht von

denen einer jeweils in entsprechender Richtung brennenden Gleichstromentladung. Im Überlagerungsbild liegt in der Mitte der Entladungsbahn ein lichtstarkes Stück positiver Säule (Fig. 2 von A—B). Dem Faradayschen Dunkelraum der einen Phase ist die positive Säule der anderen eingelagert. Das negative Glimmlicht verdeckt in seinem Gebiet durch die größere Lichtstärke die positive Säule. (Alles unter den später angegebenen Bedingungen: ungeschichtete Entladung in reinem N_2 zylindrisches Entladungsrohr mit ebenen Elektroden und mit einem Durchmesser, bei dem die positive Säule voll entwickelt ist.)

Fig. 2



Bei Hochfrequenz ist dagegen bekanntlich das leuchtende Mittelstück, die positive Säule, durch gut ausgeprägte Dunkelräume von den negativen Glimmlichtern getrennt (Fig. 1, c). In jeder Phase muß also auf der positiven Seite die Säule in dem Gebiet unterbrochen sein, in dem in der Gegenphase der Faradaysche Dunkelraum liegt.²⁾ ³⁾

Zwischen diesen beiden Extremen liegt eine stetige Entwicklungsreihe. Eine von der beschriebenen niederfrequenten abweichende Form trat bei den vorliegenden Versuchen im Gebiet von 1000—2000 Hz auf. (Je nach Druck und Stromstärke.) Hier bildete sich am Kopfe des beiderseitigen negativen Glimmlichts ein schmaler Dunkelraum aus (Fig. 1, b). Man hat den Eindruck, daß von dem stärkeren Mittelstück

1) O. Bartelt, *Ann. d. Phys.* [5] 9, S. 679. 1931.

2) H. Ebert, a. a. O.

3) E. Wiedemann, *Wied. Ann.* 67, S. 714. 1899.

(in Fig. 2 von $A-B$) ein schwächer leuchtendes Stück ($A-C$, bzw. $B-D$) überstände. Die Grenzen waren allerdings nicht immer so scharf, wie in den Bildern der Fig. 1.

Dies überstehende Stück zog sich mit wachsender Frequenz nach der Mitte zurück, der Dunkelraum wurde größer, bis schließlich nur das stärkere Mittelstück übrigblieb und sich die beiden zur Mitte symmetrischen Faradayschen Dunkelräume in voller Ausdehnung zeigten. Diese Form hatte sich bei einer Frequenz von 3000—3500 Hz eingestellt und blieb endgültig bis zur Hochfrequenz. Es muß dabei erwähnt werden, daß die angegebenen Frequenzwerte mit Röhren und Elektrodenform, Gasart und Druck sehr stark schwanken¹⁾. Der beschriebene Entwicklungsgang scheint jedoch typisch und allgemein zu sein.

Die aus den Überlagerungsbildern erschlossenen Dunkelräume in den positiven Säulen der Einzelphasen lassen sich mit geeigneten Mitteln direkt feststellen und sind bereits seit langem durch Beobachtung mittels des rotierenden Spiegels¹⁾ bekannt. Da außerdem zu vermuten war, daß diese Fehlstelle einer vielleicht aufschlußreichen zeitlichen Veränderung und Entwicklung unterliege, sollte eine Anordnung getroffen werden, die es erlaubt, auch beliebige Zeitmomente aus der Phase der Beobachtung zugänglich zu machen und das entsprechende Entladungsbild so lange zu fixieren, daß auch photographische Aufnahmen möglich würden.

Experimentelle Anordnung

Zur Erzeugung des Wechselstromes von etwa 100 bis 3000 Hz diente eine Lichtsirene. Die Schlitze auf der Loch-

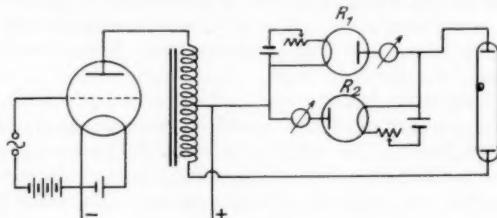


Fig. 3

scheibe und die Blende vor der Photozelle waren so gewählt, daß sinusförmige Belichtung der Zelle zustande kam. Nach mehrfacher Verstärkung (Fig. 3 zeigt die Endstufe) der an der

1) H. Ebert a. a. O.; W. Lessing a. a. O.

Photozelle erzeugten Wechselspannung gelang es, die Entladung mit Wechselstrom der durch Schlitzzahl und Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe gegebenen Frequenz zu betreiben. Die Spannung blieb trotz der Verstärkung vollkommen sinusförmig, wie Oszillogramme zeigten. Zwei als Regulierwiderstände (Fig. 3 $R1$ und $R2$) in entgegengesetzter Richtung parallel geschaltete Glühkathodenröhren lagen in Serie mit dem Entladungsrohr und flachten durch ihren Sättigungsstrom die Kurve etwas ab.

Die Lochscheibe der Lichtsirene diente gleichzeitig als Stroboskopscheibe. Hierzu war ein zweiter Kranz von sehr schmalen Schlitzten eingeschnitten, die sich bezüglich der Schlitzte des ersten Kranzes alle an gleicher Stelle befanden, so daß der Beobachtung stets derselbe Phasenabschnitt freigegeben wurde. Diese Kombination gewährleistete den für Aufnahmen notwendigen unbedingten Synchronismus.

Um definierte Abschnitte der Phase ins Auge zu bekommen, wurde zwischen Auge und Stroboskop eine Schlitzblende gesetzt, mit gleicher Schlitzbreite wie die Schlitzte des Stroboskop. Diese war auf einer in Richtung der Scheibenachse feststehenden Achse drehbar. Durch Weiterdrehen der Blende mittels einer Mikrometerschraube konnte dann die ganze Phase abschnittsweise beobachtet werden. Bei photographischen Aufnahmen trat an Stelle des Auges die Kamera.

Die Vakuumapparatur mit Vorvakuum- und Hochvakuumseite war die übliche. Peinliche Sauberkeit, sorgfältiges Entgasen durch starke Glimmbelastung, Kühlung mit flüssiger Luft und Darstellung reinen Stickstoffs aus Natriumazid unmittelbar im Hochvakuum waren nötig, um ungeschichtete Entladung zu erhalten, auf die sich vorliegende Arbeit beschränkt. Trotzdem machte sich in einigen Phasenabschnitten die Andeutung einer Schichtung bemerkbar.

Das Entladungsrohr war zylindrisch und sein Durchmesser so gewählt, daß die positive Säule schon bei Gleichstrom in voller Länge entwickelt war. In weiten Röhren ist nämlich die Säulenlänge frequenzabhängig, und diese Komplikation sollte vorerst vermieden werden. Die kreisförmigen ebenen Innenelektroden bestanden aus Aluminium (Rohrlänge 30 cm, Rohrdurchmesser 3 cm, Elektrodenabstand 15,5 cm, Elektrodendurchmesser 2 cm).

Ergebnisse

Bis hinauf zu etwa 1000 Hz war bei einem Entladungsstrom von 1,5 mA (galvanisches Mittel) und 0,5 mm Hg-Druck

stroboskopisch nichts Besonderes zu bemerken. Die positive Säule war im Zündmoment schwach leuchtend und unscharf begrenzt, aber nirgends unterbrochen. (Es sei nochmals betont, daß die angegebenen Zahlenwerte der Frequenzen nur für die gewählten Bedingungen gelten und bei deren Veränderung innerhalb einer Zehnerpotenz schwanken können.) Oberhalb dieser Frequenz begannen sich die ersten Anzeichen eines Effektes zu zeigen, der auf den Beginn der Nachwirkungen schließen ließ. Zur näheren Erörterung dienen die photographischen Aufnahmen, die in Fig. 1 von *d* bis *g* und *h* bis *k* wiedergegeben sind. Jede Reihe besteht aus zeitlich aufeinanderfolgenden Momentanbildern jeweils derselben Entladung, die von Aufnahme zu Aufnahme durch Weiterdrehen der zwischen rotierender Scheibe und Kamera stehenden Schlitzblende um einen bestimmten Betrag gewonnen sind. (Belichtungsdauer je 3 Min., aufgenommen auf Agfa Superpanplatten. Bilder *d*—*g* bei 1300 Hz, *h*—*k* bei 2200 Hz. Alle bei 1,5 mA und 0,5 mg Hg. Um die Lage der Anode bei den Aufnahmen *h*—*i* deutlich hervortreten zu lassen, wurde die durch die dünn aufliegende und schwach leuchtende Anoden-glimmhaut hervorgerufene Schwärzung auf der Platte durch leichte Retusche verstärkt.)

Die Kathode befindet sich jeweils unten. Die erste Aufnahme jeder Reihe (*d* und *h*) gibt das Entladungsbild bei der Zündung wieder. Die positive Säule ist von der Anode durch einen nichtleuchtenden Raum getrennt, der ziemlich genau das Gebiet einnimmt, das in der Gegenphase vom negativen Glimmlicht und Faradayschen Dunkelraum besetzt ist. Die Anode ist nur von einer schwachen Lichthaut überzogen. Die positive Säule entwickelt sich sodann auf die Anode zu, und der Dunkelraum wird dadurch verkleinert (*e* und *i*). Aus hier nicht angeführten Messungen ergab sich als Geschwindigkeit des Vorrückens des positiven Lichtes die Größenordnung von $5 \cdot 10^3$ bis $20 \cdot 10^3$ cm/sec. Zwischen den Bildern *d* und *f* bzw. *h* und *j* liegt eine Zeitdifferenz von $4,3 \cdot 10^{-4}$ bzw. $3,2 \cdot 10^{-4}$ Sek. (bestimmbar aus der Stellung der Mikrometerschraube an der Blende). Hieraus folgt gemäß den Entladungsbildern eine Geschwindigkeit von 8000 bzw. 5000 cm/sec.

Ist die Zeit *t*, die das positive Licht jeweils benötigt, um die Anode zu erreichen, kleiner als die Entladungsdauer *T* (zwischen Zündung und Löschung), so schließt sich die Lücke ganz (*f*). Bei niedriger Frequenz, also verhältnismäßig langer Dauer der Phase, wird dies allgemein eintreten. Im Überlagerungsbild ist ein Dunkelraum dann nicht zu erwarten, was

auch die direkte photographische Aufnahme (*g*) ohne Stroboskop bestätigt. Ist jedoch $T < t$, so bleibt ein Dunkelraum vor der Anode bestehen, dessen Breite von der Strecke abhängt, die die Säule bis zur Lösung nicht mehr hat überbrücken können. Bild *j* zeigt den Moment vor dem Löschen. Es ist deutlich sichtbar, daß der Dunkelraum vor der Anode noch vorhanden ist. Im Überlagerungsbild (*k*) wird dadurch das Erscheinen der beiden zur Mitte symmetrischen Faradayschen Dunkelräume ermöglicht, die, streng genommen, Überlagerungen des Faradayschen Dunkelraums der einen und des restierenden „Anodendunkelraums“ der anderen Phase sind. Das vom stärkeren Mittelstück auf das Glimmlicht zu überstehende schwächere Stück der Säule (besonders deutlich in Bild *b*) ist durch das zeitliche Vorrücken der positiven Säule auf die Anode zu erklären. Mit wachsender Frequenz wird der Weg, den die Säule auf die Anode zu zurücklegt, infolge der kürzeren Phasendauer immer kleiner und schließlich praktisch Null. Das heißt aber, der „Anodendunkelraum“ bleibt in seiner ganzen Ausdehnung, die ihm im Zündmoment zukam, bestehen. Er erstreckt sich also über das Gebiet, das in der Gegenphase vom Glimmlicht und Faradayschen Dunkelraum eingenommen wird. Im Überlagerungsbild können dann die beiden zur Mitte symmetrischen Dunkelräume in voller Ausdehnung erscheinen. Wie schon erwähnt, war diese Entwicklung bei 3000 bis 3500 Hz vollendet.

Ohne wesentliche Veränderung findet sich dasselbe Entladungsbild bei Hochfrequenz bis zu sehr hohen Frequenzen. Die dann unter der eventuellen Elektronenpendelung auftretenden Erscheinungen sollen hier unberücksichtigt bleiben.¹⁾

Die Erklärung des beschriebenen „Anodendunkelraums“ aus dem Einfluß von Restladungen der vorhergehenden Phase ist einleuchtend. Wie erwähnt, bleibt er bei niedriger Frequenz aus, ebenfalls dann, wenn eine Phase durch die einzustellbaren Röhrenwiderstände (R_1 und R_2 in Fig. 3) ausgeschaltet wurde. Bei der von Valle beschriebenen lichtlosen Stelle in der Säule bei intermittierendem Gleichstrom handelt es sich um eine Lücke in der Säule des vorglimmenden Townsendstromes. Sie befindet sich übrigens infolge der ganz anderen Lagerung der Restionisation an anderer Stelle als die von uns beschriebene.

Ist die Löschpause Θ , die — allerdings nicht genau definierte — Nachwirkungsdauer τ , die Entladungsdauer T

1) K. Schäfer, Diss. Köln, 1930. R. W. Wood, Phys. Rev. 35. S. 673. 1930; F. Kirchner, Ann. d. Phys. 7. S. 798. 1930.

(zwischen Zündung und Löschung), die Zeit, die die Säule braucht, um zur Anode vorzuwachsen, t , so ist die Bedingung dafür, daß ein „Anodendunkelraum“ im Moment der Zündung auftritt

$$\Theta < \tau;$$

die Bedingung dafür, daß er die Entladungszeit überdauert, ist
 $T < t$.

Da für die Dauer der Löschpause auch andere Faktoren als die Frequenz von bestimmendem Einfluß sind, und die Nachwirkungsdauer u. a. stark von Stromdichte und Druck abhängig zu sein scheint, erklärt es sich, daß der „Anodendunkelraum“ bei Lessing¹⁾ und Amaduzzi²⁾ bei wesentlich niederen Frequenzen beobachtet wurde. Seine Frequenzabhängigkeit sowie auch das Voreilen der Säule auf die Anode zu konnte bei den dort gewählten Versuchsanordnungen nicht zur Beobachtung kommen.

Quantitative Untersuchungen über die Dauer der Löschpause in Abhängigkeit von Stromdichte und Druck, nach der sich die Fehlstelle in der Säule im Zündmoment noch eben bemerkbar macht, sind im Gange. Für die vorliegenden Versuche bewegt sich diese Zeit in der Größenordnung von 10^{-4} Sek. [10^{-3} Sek. für intermittierende Entladung, bei Valle³⁾ in Übereinstimmung mit anderen einschlägigen Messungen⁴⁾]. Bei der Frequenz von 1000 Hz, bei der unter den oben gewählten Bedingungen die Lücke erstmalig erschien, betrug nach oszillographischen Aufnahmen die Löschpause $1/6$ der Phasendauer, also $0,8 \cdot 10^{-4}$ Sek.

Daß die Nachwirkungen sich an der beschriebenen Stelle bemerkbar machen, ist erklärlich aus der gegenüber den anderen Entladungsstellen sehr hohen Trägerkonzentration⁵⁾ des Glimmlichts und Faradayschen Dunkelraums, die in der Gegenphase dieses Gebiet einnehmen.

Zusammenfassung

1. Es wird die Frequenzabhängigkeit des Wechselstromentladungsbildes beschrieben. Bei einer bestimmten Frequenz bilden sich zwei schmale zur Mitte symmetrische Faradaysche

1) W. Lessing, a. a. O.

2) L. Amaduzzi, Phys. Ztschr. **13**, S. 1202. 1912.

3) G. Valle, a. a. O.

4) E. Rumpf, Ann. d. Phys. **66**, S. 50. 1921; R. Seeliger, Jahrb. Rad. Elektron. **20**, S. 353. 1923; A. J. Rothe, Phys. Ztschr. **31**, S. 520. 1930.

5) K. T. Compton, L. A. Turner u. W. H. Mc Curdy, Phys. Rev. **24**, S. 597. 1924.

Dunkelräume aus, die sich mit wachsender Frequenz zu einem Maximum verbreitern.

2. Durch eine Kombination von Lichtsirene und Stroboskop gelang es, den Entwicklungsgang der Entladung während einer Phase bei wachsenden Frequenzen zu beobachten. Es ergibt sich, daß die positive Säule von einer gewissen Frequenz an offenbar unter der Wirkung von Restladungen aus der vorhergehenden Phase eine nichtleuchtende Lücke hat, die das Gebiet einnimmt, das in der Gegenphase vom negativen Glimmlicht und Faradayschen Dunkelraum besetzt ist. Durch ein zeitliches Vorrücken der positiven Säule auf die Anode zu erklärt sich die Frequenzabhängigkeit des Überlagerungsbildes.

Dem Direktor des Physikalischen Instituts, Herrn Prof. Dr. Rinkel, bin ich zu besonderem Dank verpflichtet für sein dauerndes Interesse und viele Anregungen. Herr cand. phil. Freund war mir bei der technischen Durchführung eine wertvolle Hilfe.

Der Johann Hampspon-Stiftung verdanken wir die Bereitstellung von Mitteln.

Köln, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 27. November 1933)

**Die Verbesserung der Akustik
im Prinzregententheater München**
Von W. Crone, H. Seiberth und J. Zenneck

(Mit 5 Figuren)

Das Prinzregententheater in München ist dem Wagnertheater in Bayreuth nachgebildet und stellt im wesentlichen den Sektor eines Amphitheaters dar (vgl. den Grundriß Fig. 1 und den Längsschnitt im selben Maßstab in Fig. 2). Bei Opern hat die Akustik dieses Theaters mindestens keine ernsthaften Schwierigkeiten gegeben, bei Schauspielen dagegen war es berüchtigt sowohl bei den Zuhörern als in noch viel höherem Maße bei den Schauspielern. Der Zuhörer insbesondere in der oberen Hälfte hatte Schwierigkeiten, das Gesprochene zu verstehen, und der Schauspieler hatte das Gefühl, als ob außer ihm irgendwo noch jemand anders spräche.

Diese Mängel haben seit langer Zeit den Gebrauch

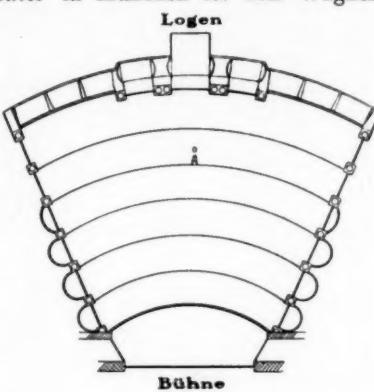


Fig. 1. Grundriß des Prinzregententheaters

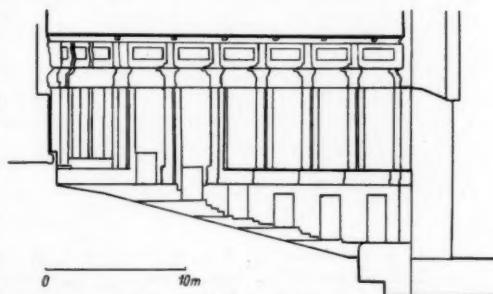


Fig. 2. Schnitt durch das Prinzregententheater

und Besuch des Theaters erheblich beeinträchtigt. Infolge davon wurde der eine von uns (Z.) gebeten, den Grund für

die schlechte Akustik festzustellen und Vorschläge für die Verbesserung zu machen.

Die akustische Vermessung des Raumes wurde von zweien von uns (C. u. S.) mit den Methoden durchgeführt, die seiner Zeit mit gütiger Unterstützung der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München von W. Schindelin¹⁾ und E. Scharstein²⁾ entwickelt und später von W. Linek³⁾ und W. Kuntze⁴⁾ weiter ausgebildet wurden. Bei der einen derselben wird in dem Raum, der untersucht werden soll, ein Schuß abgefeuert, der Schuß wirkt auf ein Mikrophon und dieses durch einen Verstärker auf einen Siemenszsillographen.

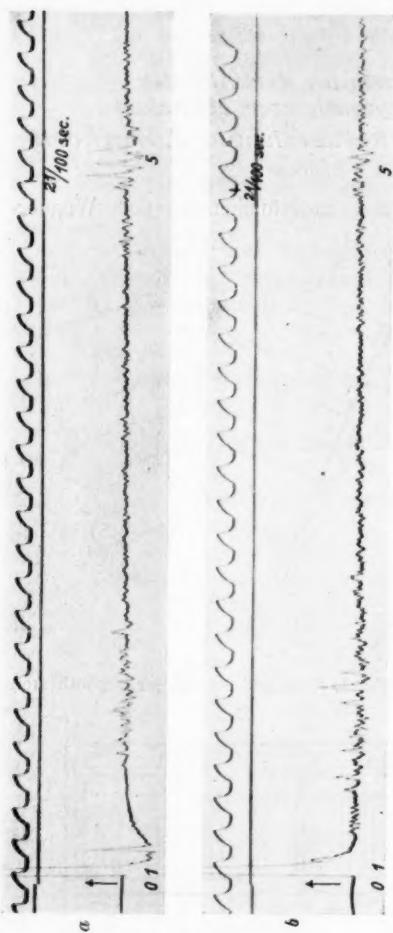


Fig. 3. Oszillographische Aufnahme des Knalls einer Flöterpistole;
Pistole und Empfänger ungefähr in der Mitte der Bühne

- 1) W. Schindelin, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 129 ff. 1929.
- 2) E. Scharstein, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 163 ff. 1929.
- 3) W. Linek, Ann. d. Phys. [5] 4. S. 1017 ff. 1930.
- 4) W. Kuntze, Ann. d. Phys. [5] 4. S. 1058 ff. 1930.

phen. Das Oszillogramm gibt ein Bild des Schallverlaufes im Raum, aus dem die Lage störender Flächen mit Sicherheit entnommen werden kann.

Zwei Aufnahmen sollen wiedergegeben werden, eine für den Bühnen- und eine für den Zuschauerraum.

Bei der erstenen (Fig. 3a) stand das Aufnahmemikrophon auf der Bühne ungefähr in dem geometrischen Mittelpunkt des kreisförmigen Theaters. Ge- schossen wurde unmittelbar neben dem Mikrophon in der Richtung nach den mittleren Logen. Außer dem direkten Schall 1 und einer Reflexion in unmittelbarer Nähe des Mikro- phons zeigt das Oszillogramm¹⁾ nach einer Zeit von $\frac{22}{100} \approx \frac{1}{5}$ Sek. eine starke dreifache Reflexion (5), die, wie aus der Laufzeit eindeutig hervorgeht, in der in Fig. 5 eingezzeichneten

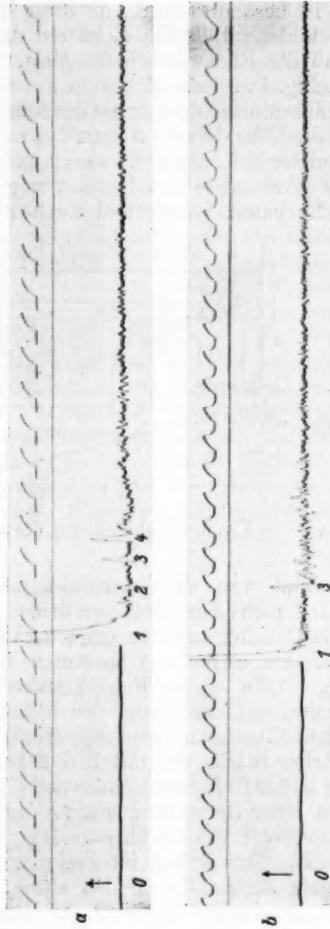


Fig. 4. Oszillographische Aufnahme des Knalls einer Flobertpistole; Pistole ungefähr in der Mitte der Bühne, Empfänger im Zuschauerraum bei 4 in Fig. 1

1) In diesem und den folgenden Oszillogrammen bedeutet:

- 0 den Zeitpunkt des Abschusses,
- 1 den direkten Schall,
- 2 Reflexion an der Seitenwand allein,
- 3 Reflexion an der Decke allein,
- 4 Reflexion über Seitenwand und Rückwand,
- 5 Reflexion über Decke und Rückwand (vgl. Fig. 5).

Die obere Kurve stellt Zeitmarken von $\frac{1}{100}$ Sek. dar.

Weise zustande kommt: der Schall wird zuerst an dem der Rückwand benachbarten Teil der Decke, dann an der Rückwand über den Logen (oder umgekehrt) reflektiert. Die Reflexion ist besonders stark, da diese Rückwand einen Zylinder-Spiegel bildet. Daß das Echo ein dreifaches ist, röhrt davon her, daß die Rückwand nicht glatt, sondern stark gegliedert ist (vgl. Fig. 1). Diese Reflexion war es, die den Schauspieler in erster Linie störte, wenn er auf der Bühne in den Kreismittelpunkt oder in die Nähe desselben kam. Sie störte auch dann, wenn zwei Schauspieler auf der Bühne waren und sich an Stellen befanden, die zur Längsachse des Raumes ungefähr symmetrisch lagen. Diese Reflexion verschwand auch nicht, wenn das Theater

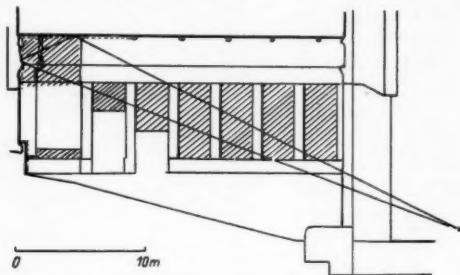


Fig. 5. Strahlrichtung des störenden Echoes

voll besetzt war, da die reflektierenden Flächen durch eine Besetzung nicht beeinflußt werden.

Ein Oszillogramm für den *Zuschauerraum* ist dasjenige von Fig. 4a. Es wurde aufgenommen in der Mitte des oberen Drittels (Stelle A von Fig. 1), während, wie bei dem Oszillogramm 3a, auf der Mitte der Bühne geschossen wurde. In diesem Oszillogramm sind Reflexionen von einigermaßen beträchtlicher Stärke die mit 2, 3, 4 bezeichneten, die (vgl. Fußnote 1) S. 301) von der Seitenwand (2) bzw. der Decke allein (3) und von einer Reflexion zuerst an der Seitenwand und dann an der Rückwand (4) herrühren. Da die Laufzeit dieser Echos verhältnismäßig gering ist (bei dem Echo 4 erst $\frac{3.5}{100}$ Sek.), so können sie nicht erheblich stören. Was hier mehr stört, ist der allgemeine Nachhall im Raum, der die Gesamtheit aller möglichen vielmaligen Reflexionen darstellt. Die Nachhallzeit wurde mit einem Heulton bei leerem Theater zu etwa 2,2 Sek. bestimmt. Zu vermuten ist außerdem, daß der Zuhörer gestört wird dadurch, daß der an der kreisförmigen

Rückwand nach Fig. 5 reflektierte Schall auf die Bühne konzentriert und an den dort vorhandenen Dekorationen nach dem Zuschauerraum zurückgeworfen wird und dorthin mit sehr großer Laufzeit gelangt.

Nach diesen Ergebnissen war die *Abhilfe* gegeben. Es mußten 1. die in Fig. 5 wiedergegebenen Reflexionen, die in erster Linie die Störung des Schauspielers bewirkten, beseitigt, und 2. der allgemeine Nachhall verringert werden.

Das erstere geschah dadurch, daß der der Rückwand benachbarte Teil der Decke und die Rückwand oberhalb der Logen mit Stoff (ganz weicher Filz) in faltiger Aufhängung verkleidet wurden. Das letztere (Verringerung des allgemeinen Nachhalls) wurde dadurch erstrebt, daß man die Rückwand auch unterhalb der Logen und die Nischen an der Seite (vgl. Fig. 1) mit demselben Stoff verhängte. In Fig. 5 sind die verhängten Teile der Decke gestrichelt, diejenigen der anderen verhängten Flächen schraffiert.

Den Erfolg dieser Maßnahmen zeigen die Oszillogramme 3b und 4b, die nach der Änderung des Theatersaales unter möglichst genau denselben Bedingungen wie die entsprechenden Oszillogramme 3a und 4a aufgenommen wurden.

Der Vergleich der Oszillogramme 3a und 3b beweist in äußerst anschaulicher Weise, wie durch die getroffenen Maßnahmen die störende Reflexion 5 auf ein Minimum reduziert wurde; nach dem Urteil der Schauspieler bedeutet sie jetzt überhaupt keine Störung mehr.

Vergleicht man die Oszillogramme 4a und 4b, so ist interessant, daß die Reflexionen (2 und 4), die von der Seite und von Seite und Rückwand herrührten, infolge der Verhängung vollkommen verschwunden sind. Die Reflexion 3 von der Decke allein — der Reflexionspunkt liegt weit vor dem verhängten Teil der Decke — ist praktisch unverändert. Daß der allgemeine Nachhall durch die Verhängung vermindert worden ist, läßt sich aus einem Vergleich der Oszillogramme 4a und 4b nur ableiten, wenn man berücksichtigt, daß die Empfindlichkeit (Ordinatenmaßstab) bei Fig. 4b erheblich größer war. Tatsächlich hat sich die Sprachverständlichkeit in der oberen Hälfte des Theaters ganz bedeutend verbessert.

Wir glaubten, diese Erfahrungen mitteilen zu sollen, weil sie ein überzeugendes Beispiel¹⁾ dafür sind, wie die akustische

1) Ein anderes Beispiel (Aula der Universität Freiburg i. B.), in dem eine Abhilfe verhältnismäßig einfach gewesen sein würde, haben E. Scharstein und W. Schindelin (Ann. d. Phys. [5] 2. S. 194ff. 1929) beschrieben.

Vermessung auch in berüchtigten Fällen unter Umständen zu einer verhältnismäßig einfachen Abhilfe führen kann.¹⁾

Wer das Theater besucht, wird sich außerdem überzeugen, daß die Änderungen, die durch künstlerische Sachverständige in vorzüglicher Weise ausgeführt wurden, das Aussehen des Theaters gewiß nicht verschlechtert, vielleicht verbessert haben.

1) Die Untersuchung wurde mit Apparaten ausgeführt, die uns seinerzeit von der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft zur Verfügung gestellt wurden. Wir möchten auch an dieser Stelle unseren verbindlichsten Dank dafür aussprechen.

München, Physikal. Institut der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 21. November 1933)

**Der Einfluß
der Divergenz der primären Röntgenstrahlung
auf die Auswertung von Diagrammen
nach Rückstrahlverfahren**

Von Franz Lihl

(Mitteilung aus der Versuchsanstalt
für röntgentechnische Materialuntersuchungen in Wien)

(Mit 18 Figuren)

In vorliegender Abhandlung soll gezeigt werden, welche Verschiebungen die Außen- und Innenkanten der Interferenzlinien unter dem Einfluß der Divergenz der primären Röntgenstrahlung bei Rückstrahlverfahren erleiden. Es werden Formeln abgeleitet, mit deren Hilfe es möglich ist, den Einfluß der Divergenz rechnerisch zu eliminieren.

In den letzten Jahren haben Verfahren in der Physik und Technik Eingang gefunden, die die Beugung von langwelligen Röntgenstrahlen unter großen Glanzwinkeln dazu benützen, an ebenen Flächen eines Probekörpers oder Werkstückes Untersuchungen auszuführen. Diese verfolgen teils den Zweck, durch Vermessung der Interferenzlinienbreite Schlüsse auf die Größe der Gitterstörungen des Materials zu ziehen, teils dienen sie zur Bestimmung von Gitterparametern. Bei all diesen Untersuchungen wurde aber bis jetzt der Auswertung eine streng parallele Röntgenstrahlung zugrunde gelegt und die immer vorhandene Divergenz nicht rechnerisch erfaßt, eine Vernachlässigung, die bei der Präzisionsbestimmung von Gitterparametern besonders nachteilig zur Geltung kommen kann. Schon die bloße Anschauung lehrt, daß sich die Divergenz der Primärstrahlung je nach dem Beugungswinkel und den Kameradaten in verschiedener Weise auswirken kann. So kann es Beugungswinkel geben, bei denen die Divergenz zur Interferenzlinienverbreiterung keinen Beitrag liefert, während sie bei anderen Beugungswinkeln voll wirksam ist. Diese durch die Divergenz der primären Röntgenstrahlung bedingten Abweichungen aufzuzeigen und einen Weg anzugeben, wie sie bei der Auswertung der Diagramme Berücksichtigung finden kann, soll Gegenstand der vorliegenden Arbeit sein.

Die verschiedenen Rückstrahlverfahren unterscheiden sich voneinander nur durch die Formgebung des Films, welche auf drei verschiedene Arten erfolgen kann. Beim ältesten Verfahren, dem *Planfilmreflexionsverfahren*, dient ein zwischen Blende und Präparat senkrecht auf den Zentralstrahl gestellter planer Film zur Aufzeichnung der Interferenzlinien. Beim *Kegelreflexionsverfahren* erhält der Film die Form eines Kreiskegels mit dem Zentralstrahl als Achse, während er beim *Zylinderreflexionsverfahren* als Kreiszylinder ausgebildet ist. Da das Planfilmreflexionsverfahren nur einen Spezialfall des Kegelreflexionsverfahrens darstellt, sollen die folgenden Berechnungen zuerst für das Kegelreflexionsverfahren durchgeführt werden, um dann im nachfolgenden Abschnitt in einfacher Weise auf das Planfilmreflexionsverfahren übertragen zu werden. Es wird bei den Berechnungen zweckmäßig ein ähnlicher Weg eingeschlagen, wie er schon bei der Berechnung des Einflusses der Divergenz auf Diagramme nach der Debye-Scherrer-Methode zum Ziele führte.¹⁾

I. Berechnungen für das Kegelreflexionsverfahren

Das Kegelreflexionsverfahren²⁾ besteht, wie Fig. 1 zeigt, darin, daß das durch eine Blende *B* ausgebundete Röntgenstrahlenbündel an den Atomen eines Probekörpers *K* eine Beugung erfährt und auf einem um den Zentralstrahl als Achse gelegten, kegelförmig angeordneten, Film *F* registriert wird. Wie in der oben zitierten Arbeit des Verf. muß auch hier die Voraussetzung gemacht werden, daß die Blende von Röntgenstrahlen ganz erfüllt ist, daß also nicht der Fokus, sondern die Vorderblende die Begrenzung des Röntgenstrahlenbündels bildet, eine Bedingung, die bei offenen Glühkathodenröhren,

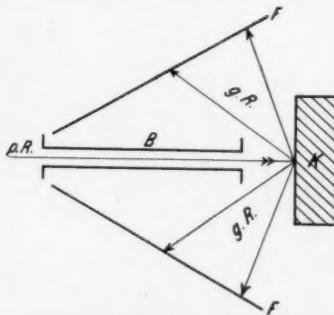


Fig. 1. Schematische Darstellung des Kegelreflexionsverfahrens.

B = Blende, *F* = Film, *K* = Probekörper, *p. R.* = primärer Röntgenstrahl, *g. R.* = gebeugter Röntgenstrahl

wie sie in oben genannter Versuchsanstalt für derartige Untersuchungen ausschließlich Verwendung finden, erfüllbar ist. Es

1) F. Lihl, *Ztschr. Krist.* **83**, S. 193—221. 1932.

2) F. Regler, *Ztschr. Phys.* **74**, S. 547—564. 1932; Bericht auf der II. Internationalen Schienentagung in Zürich, 16.—19. Juni 1932, S. 192.

ist dann die Angabe der Fokus-Präparatdistanz bedeutungslos und tritt an ihre Stelle die Distanz Vorderblende-Präparat. Ferner kann die Eindringtiefe der Röntgenstrahlen in das Präparat wegen der Langwelligkeit der verwendeten Röntgenstrahlen bei diesen wie bei allen folgenden Ableitungen vernachlässigt werden. Auch werden nur solche Strahlen Berücksichtigung finden, die innerhalb einer durch den Zentralstrahl gelegten Horizontalebene verlaufen.¹⁾

Wir bezeichnen mit:

2α den Öffnungswinkel des Kreiskegels,

a den senkrechten Abstand der Vorderblende vom Präparat,

c den Abstand des Kegelscheitels vom Präparat,

b die Länge der Kreisblende,

$2r$ den Durchmesser der Vorderblende,

$2r'$ den Durchmesser der rückwärtigen Blende,

β das Supplement von 2α

und betrachten, wie Fig. 2 schematisch zeigt, einen Schnitt durch die Kamera senkrecht auf die Präparatoberfläche. Ein Strahl s , der von einem Punkt B der vorderen Blendenöffnung im Abstand x vom Zentralstrahl z ausgeht und mit diesem einen Winkel ψ — er sei weiterhin der Divergenzwinkel genannt — einschließt, treffe den Punkt A der Präparatoberfläche. Hier erfahre er eine Beugung unter dem Winkel β nach P auf dem kegelförmig angeordneten Film. Der Abstand dieses Punktes P vom Kegelscheitel S sei R . Durch eine einfache Überlegung lässt sich zwischen diesen Größen der Zusammenhang errechnen

$$(1) \quad R = \frac{c \operatorname{tg}(\beta - \psi) + a \operatorname{tg} \psi - x}{\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\beta - \psi)}.$$

Um die Außen- bzw. Innenkanten der Interferenzlinien zu finden, muß die Frage beantwortet werden, für welches x und ψ

1) Strahlen außerhalb der Horizontalebene liefern auch bei Untersuchungen nach der Debye-Scherrer-Methode keinen Beitrag zur Linienverbreiterung (F. Lühl, a. a. O.).

2) Die Linie „ b “ ist richtig nach links bis zum Blendenanfang zu verlängern.

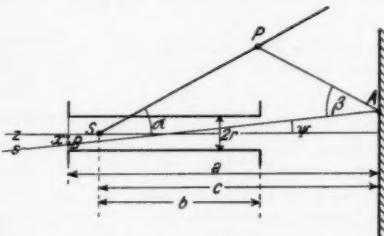


Fig. 2. Schema zur Ableitung der Gleichungen für das Kegelreflexionsverfahren²⁾

R seinen größten Wert R_{\max} bzw. kleinsten Wert R_{\min} annimmt. Wir sehen zunächst, daß für konstantes ψ

$$(2) \quad \frac{\partial R}{\partial x} < 0$$

wird, wonach in (1) $x = \pm r$ gesetzt werden muß. Dabei gilt das positive Zeichen für alle R_i , die kleiner sind als das durch Beugung des zentralen Röntgenstrahls an der Präparatoberfläche erhaltene R_0 , das negative Zeichen dagegen für alle $R_a > R_0$. Es folgt also

$$(3) \quad R = \frac{c \operatorname{tg}(\beta - \psi) + a \operatorname{tg} \psi - r}{\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\beta - \psi)}$$

mit den durch die Blendendimensionen bedingten Einschränkungen des Divergenzwinkels:

für die Innenkanten ($R_i < R_0$)

$$(4) \quad -\frac{r' - r}{b} \leq \psi \leq \frac{r' + r}{b}, \quad r > 0,$$

für die Außenkanten ($R_a > R_0$)

$$(5) \quad -\frac{r' + r}{b} \leq \psi \leq \frac{r' - r}{b}, \quad r < 0.$$

In Gl. (3) ist nur noch das zur Berechnung von R_{\min} bzw. R_{\max} notwendige ψ unbekannt. Es ist also diese Gleichung darauf zu prüfen, ob in den durch die Einschränkungen (4) und (5) abgegrenzten Bereichen ein Minimum für R_i — wir werden es R_{\min} nennen — bzw. Maximum für R_a — es sei mit R_{\max} bezeichnet — liegt. Wir formen zunächst (3) noch um, indem wir $\operatorname{tg} \psi = \psi$ setzen, was ja für die gebräuchlichen Blendendurchmesser erlaubt ist, und erhalten:

$$(6) \quad R = \frac{a \psi^2 \operatorname{tg} \beta + \psi(a - c - r \operatorname{tg} \beta) + c \operatorname{tg} \beta - r}{\psi(\sin \alpha \operatorname{tg} \beta - \cos \alpha) + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta + \sin \alpha}.$$

Bildet man für R_i $\frac{\partial R}{\partial \psi} = 0$, so folgt das Extremum aus der quadratischen Gleichung:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi^2 + 2\psi \frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \beta + \sin \alpha}{\sin \alpha \operatorname{tg} \beta - \cos \alpha} + \frac{1}{a \operatorname{tg} \beta} \\ \quad \cdot \left[(a - c - r \operatorname{tg} \beta) \frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \beta + \sin \alpha}{\sin \alpha \operatorname{tg} \beta - \cos \alpha} - (c \operatorname{tg} \beta - r) \right] = 0. \end{array} \right.$$

Es muß zunächst untersucht werden, ob das durch letztere Gl. (7) definierte Extremum noch in den Bereich der durch (4) für die Innenkanten geforderten Einschränkung fällt. Diese Entscheidung soll für ein Beispiel auf graphischem Wege getroffen werden, wobei die Aufnahmebedingungen so gewählt werden, wie sie bei der in der Versuchsanstalt verwendeten Kegelkamera meist vorliegen, nämlich: $2\alpha = 60^\circ$; $a = c = 7,5$ cm;

$b = 5,7$ cm; $2r = 2r' = 0,21$ cm. Mit diesen Zahlenwerten errechnen wir nun für verschiedene Winkel β im Bereich $15-75^\circ$ gemäß Gl.(3) die Abhängigkeit der R_i und R_a vom Divergenzwinkel ψ und erhalten so die Tab. 1 für R_i , und die Tab. 2 für R_a .

Tabelle 1

ψ	R_i in cm für							
	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 50^\circ$	$\beta = 55^\circ$	$\beta = 60^\circ$	$\beta = 65^\circ$	$\beta = 70^\circ$	$\beta = 75^\circ$
-0,0875	2,416	5,338	5,728	6,115	6,501	6,892	7,296	7,720
-0,0699	2,447	5,347	5,729	6,107	6,481	6,861	7,252	7,660
-0,0524	2,482	5,357	5,733	6,100	6,465	6,834	7,211	7,605
-0,0349	2,518	5,372	5,742	6,097	6,454	6,812	7,177	7,558
-0,0175	2,560	5,390	5,752	6,100	6,446	6,793	7,146	7,512
0,0000	2,602	5,414	5,766	6,106	6,443	6,779	7,121	7,472
0,0175	2,648	5,441	5,785	6,117	6,443	6,769	7,099	7,438
0,0349	2,699	5,468	5,805	6,131	6,447	6,762	7,082	7,407
0,0524	2,752	5,501	5,830	6,149	6,456	6,761	7,070	7,384
0,0699	2,810	5,538	5,859	6,170	6,468	6,765	7,061	7,364
0,0875	2,869	5,579	5,894	6,194	6,485	6,771	7,058	7,349

Tabelle 2

ψ	R_a in cm für							
	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 50^\circ$	$\beta = 55^\circ$	$\beta = 60^\circ$	$\beta = 65^\circ$	$\beta = 70^\circ$	$\beta = 75^\circ$
-0,0875	2,674	5,475	5,849	6,220	6,590	6,965	7,352	7,759
-0,0699	2,711	5,487	5,853	6,215	6,573	6,937	7,311	7,702
-0,0524	2,752	5,501	5,861	6,211	6,561	6,914	7,274	7,651
-0,0349	2,792	5,519	5,872	6,212	6,553	6,895	7,244	7,605
-0,0175	2,843	5,540	5,887	6,218	6,548	6,879	7,216	7,562
0,0000	2,889	5,567	5,903	6,227	6,548	6,868	7,194	7,528
0,0175	2,941	5,598	5,925	6,241	6,552	6,861	7,175	7,498
0,0349	3,000	5,628	5,948	6,258	6,559	6,857	7,161	7,470
0,0524	3,060	5,665	5,977	6,279	6,570	6,859	7,152	7,451
0,0699	3,124	5,706	6,010	6,304	6,586	6,867	7,147	7,433
0,0875	3,191	5,750	6,048	6,332	6,606	6,876	7,147	7,422

Da der Gang der Werte für $\beta = 15^\circ$ bis $\beta = 45^\circ$ kein wesentlich verschiedenes Verhalten zeigt, ist aus den beiden Tabellen nur die Abhängigkeit für diese Winkel ersichtlich. Besonders von Interesse ist aber der Bereich von $\beta = 50^\circ$ bis $\beta = 70^\circ$, da in diesem Intervall der Einfluß der Divergenz auf die Verschiebung der Außen- und Innenkanten der Interferenzlinien überhaupt erst wirksam wird. Stellen wir für einige Winkel β das Ergebnis graphisch dar, so erhalten wir die Figg. 3-6, in welchen die Kurven in dem durch die Aufnahmebedingungen erlaubten Divergenzbereich voll aus-

gezogen wurden, während der übrige Teil gestrichelt eingezeichnet wurde. Dieser Divergenzbereich erscheint gegeben durch die Einschränkung:

$$\begin{aligned} \text{für } R_{\min}: 0 \leq \psi \leq 0,0368, \\ \text{für } R_{\max}: -0,0368 \leq \psi \leq 0. \end{aligned}$$

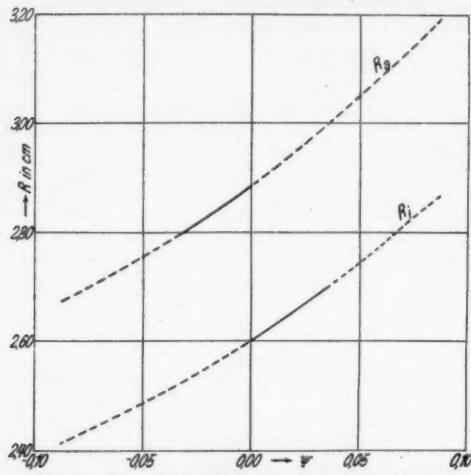


Fig. 3. Der Abstand R des Interferenzkreises vom Kegelscheitel in Abhängigkeit vom Divergenzwinkel ψ , für den Beugungswinkel $\beta = 15^\circ$

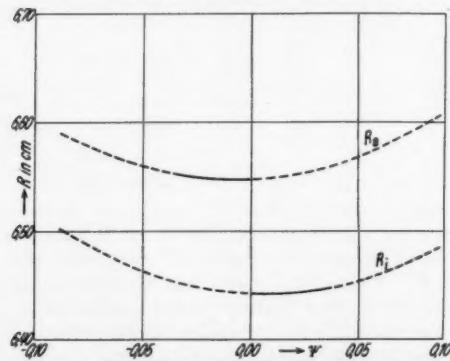


Fig. 4. Der Abstand R des Interferenzkreises vom Kegelscheitel in Abhängigkeit vom Divergenzwinkel ψ , für den Beugungswinkel $\beta = 60^\circ$

In Fig. 6 sind die Kurven für R_a in dem kritischen Bereich von $50-70^\circ$ übereinander aufgetragen und lassen gut das Einsetzen des Einflusses der Divergenz erkennen. Jetzt gewinnt erst die Gl. (7) Bedeutung, die die zur Berechnung von R_{\min} nötigen Winkel ψ_{\min} ableiten lässt. Aus Tab. 3 sind

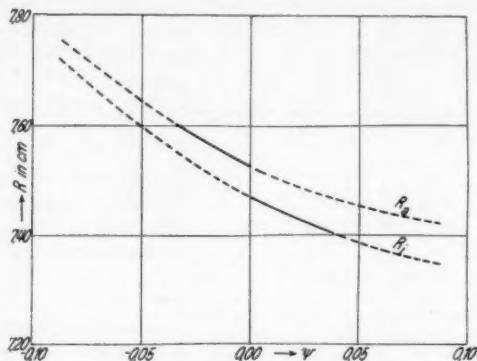


Fig. 5. Der Abstand R des Interferenzkreises vom Kegelscheitel in Abhängigkeit vom Divergenzwinkel ψ , für den Beugungswinkel $\beta = 75^\circ$

für einige Winkel β die nach (7) errechneten Werte von ψ_{\min} zu ersehen. Fig. 7 zeigt diese Abhängigkeit graphisch. Der unter den gewählten Aufnahmeverhältnissen mögliche Teil der Kurven ist wieder stark ausgezogen, während der übrige Teil

Tabelle 3

β	50°	55°	58°	62°	65°	70°
ψ_{\min}	-0,080	-0,041	-0,010	0,024	0,050	0,090

der Kurven gestrichelt ist. Für alle Winkel $\beta \leq 59,2^\circ$ ist $\psi_{\min} = 0$, für alle Winkel $\beta \geq 63,5^\circ$ dagegen ψ_{\min} konstant gleich 0,0368, was durch die zur Abszissenachse parallelen Geraden angedeutet werden soll.

Von einer graphischen Darstellung der Abhängigkeit des R_a von ψ konnte wegen ihres, den Kurven der Fig. 6 vollkommen analogen Verlaufes Abstand genommen werden.

Aus den Tabellen, sowie Kurven können wir für den untersuchten Fall folgende Gesetzmäßigkeiten ableiten:

a) Für die Innenkanten der Interferenzlinien

1. Im Bereich der kleinen Winkel β bis $\beta = 59,2^\circ$ kommt für die Innenbegrenzung der Interferenzlinien die Divergenz überhaupt nicht zur Geltung. Es können daher in diesem Bereich alle Berechnungen unter Zugrundelegung streng paralleler Primärstrahlung durchgeführt werden.

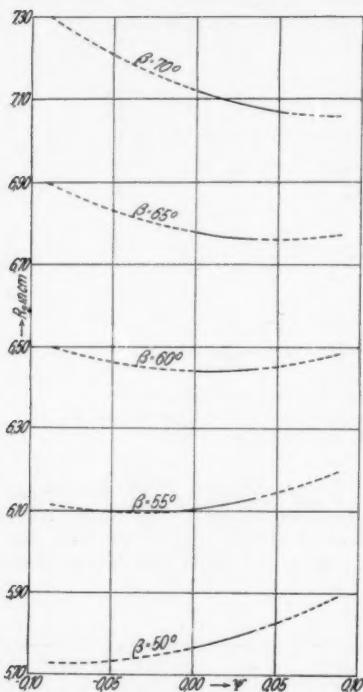


Fig. 6. Der Abstand R_i der Innenkanten der Interferenzkreise vom Kegelscheitel in Abhängigkeit vom Divergenzwinkel ψ , für einige Winkel β im Intervall $\beta = 50^\circ$ bis $\beta = 70^\circ$

weder $\psi_{\max} = 0$ oder $\psi_{\max} = -0,0368$. Der Winkel $\beta = 58,7^\circ$ trennt die beiden Gebiete, nämlich:

1. Das Gebiet der kleinen Winkel β bis $\beta = 58,7^\circ$ — in diesem Bereich ist $\psi_{\max} = 0$ — und

2. Im Intervall

$\beta = 59,2^\circ$ bis $\beta = 63,5^\circ$ nimmt der Einfluß der Divergenz ständig zu und errechnet sich der Divergenzwinkel ψ_{\min} nach Gl. (7), wobei naturgemäß nur die positiv kleinste Wurzel berücksichtigt werden darf.

3. Von $\beta = 63,5^\circ$ an kann der Divergenzwinkel zufolge der Aufnahmebedingungen nicht mehr größer werden und muß von diesem Winkel an mit dem vollen Divergenzwinkel $\psi = 0,0368$ gerechnet werden.

b) Für die Außenkanten der Interferenzlinien

Für die Außenkanten der Interferenzlinien liegen die Verhältnisse anders. Hier gibt es offenbar für ψ — wir wollen es ψ_{\max} nennen — nur zwei Möglichkeiten: ent-

2. das Gebiet der Winkel $\beta > 58,7^\circ$ — hier ist $\psi_{\max} = -0,0368$ zu setzen. Für $\beta = 58,7^\circ$ erhält man mit beiden Werten von ψ denselben Wert für R_{\max} .

Wie eine Änderung der Blenden-Präparatdistanz den Beginn des Divergenzbereiches, also den Anfang des ansteigenden Astes der Kurve in Fig. 7 verändert, sehen wir aus der Überlegung, daß für $\psi = 0$ nach Gl. (7) offenbar das konstante Glied den Wert Null erhalten muß. Man erhält dann zur Berechnung des Winkels β , für den $\psi = 0$ ist, die quadratische Gleichung:

$$(8) \quad \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{a \cos \alpha}{c \sin \alpha + r \cos \alpha} \operatorname{tg} \beta + 1 - \frac{a^2 \sin \alpha}{c \sin \alpha + r \cos \alpha} = 0,$$

deren eine Wurzel den gesuchten Wert für β darstellt. Durch Berechnung für den untersuchten Fall im Intervall von $a = c = 7$ cm bis $a = c = 9$ cm entnehmen wir der folgenden Tab. 4, daß bei der relativ großen Verschiebung des Präparates von 2 cm eine Verschiebung des Beginnes der Auswirkung der Divergenz gegen die größeren Winkel β um nur $0,19^\circ$, also etwa 11 Bogenminuten eintritt.

Tabelle 4

$a = c$	7 cm	7,5 cm	8 cm	8,5 cm	9 cm
β	$59,14^\circ$	$59,19^\circ$	$59,24^\circ$	$59,29^\circ$	$59,33^\circ$

Eine zweite Lösung der Gl. (8) zeigt an, daß für sehr kleine Winkel β ebenfalls ein Gebiet der Divergenz vorliegt. Dieses liegt aber ganz außerhalb des praktisch möglichen Intervalls und kommt für unsere Untersuchungen nicht in Frage.

Wir berechnen ferner die Abweichungen der unter Berücksichtigung der Divergenz erhaltenen Werte für R_{\min} und R_{\max} von den unter Zugrundelegung streng paralleler Primär-

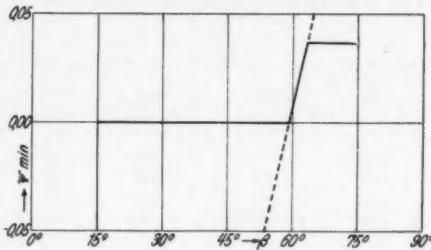


Fig. 7. Abhängigkeit des zur Bestimmung der Innenkanten der Interferenzlinien am Kegelreflexionsdiagramm nötigen Divergenzwinkels ψ_{\min} vom Beugungswinkel β

strahlung sich ergebenden Werten — sie seien mit R_{10} bzw. $R_{\alpha 0}$ bezeichnet — und nennen diese Abweichungen

$$\Delta R_{\min} = R_{\min} - R_{10},$$

$$\Delta R_{\max} = R_{\max} - R_{\alpha 0},$$

die aus Tab. 5 in Abhängigkeit von β zu ersehen sind.

Tabelle 5

β	R_{\max} in cm	R_{\min} in cm	ΔR_{\max} in cm	ΔR_{\min} in cm	B in cm
15°	2,889	2,602	0	0	0,287
30°	4,436	4,226	0	0	0,210
45°	5,567	5,414	0	0	0,153
50°	5,903	5,766	0	0	0,137
55°	6,227	6,106	0	0	0,121
60°	6,553	6,442	0,005	- 0,001	0,111
65°	6,896	6,763	0,028	- 0,016	0,133
70°	7,246	7,080	0,052	- 0,041	0,166
75°	7,610	7,405	0,082	- 0,067	0,205

Graphisch dargestellt erhalten wir den Kurvenverlauf der Fig. 8, aus welchem die Gesetzmäßigkeit abgeleitet werden kann, daß die durch die Divergenz verursachten Verbreiterungen der Interferenzlinien nach beiden Seiten hin voneinander verschieden sind. Die gestrichelte Kurve zeigt diese Abhängigkeit für das arithmetische Mittel aus ΔR_{\max} und ΔR_{\min} .

Welche Folgerungen wir aus dem Verhalten dieser und ähnlicher Kurven der nächsten Kapitel ziehen müssen, wird eingehender in Abschn. IV und V dieser Abhandlung erörtert werden.

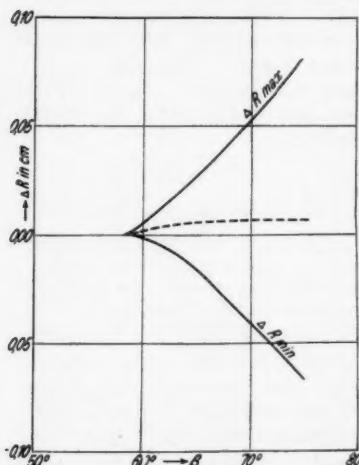


Fig. 8

Unterschrift zu Fig. 8:

Die durch die Divergenz der primären Röntgenstrahlung verursachten Verbreiterungen ΔR der Interferenzlinien am Kegelreflexionsdiagramm in Abhängigkeit von β . ΔR_{\min} = Verbreiterung der Innenkanten, ΔR_{\max} = Verbreiterung der Außenkanten, gestrichelte Kurve = Verschiebung der Linienmitte

Schließlich ist noch die Frage von Bedeutung, wie sich die Divergenz auf die Linienbreite auswirkt. Wir bilden zu diesem Zweck die Differenzen

$$(9) R_{\max} - R_{\min} = B$$

und tragen ihre Abhängigkeit von β nach Tab. 5 in Fig. 9 auf.

Diese Kurve zeigt den Einfluß der Divergenz in voller Deutlichkeit. Der absteigende Ast bis $\beta = 58.7^\circ$ entspricht all den Beugungswinkeln, für die zur Zeichnung der Linienbegrenzung die Divergenz keinen Beitrag liefert.¹⁾ Extrapoliert man diesen Kurventeil (in Fig. 9 strichliert) bis $\beta = 90^\circ$, so folgt $B = 0$, wie es auch für streng parallele Strahlung sein muß. Von $\beta = 58.7^\circ$ bis ungefähr $\beta = 61^\circ$ unterliegt die Linienbreite keinen bedeutenden Änderungen, während sie nachher wieder zunimmt.

II. Berechnungen für das Planfilmreflexionsverfahren

Die Überlegungen für das Planfilmreflexionsverfahren²⁾, welches schematisch Fig. 10 zeigt, können wesentlich ab-

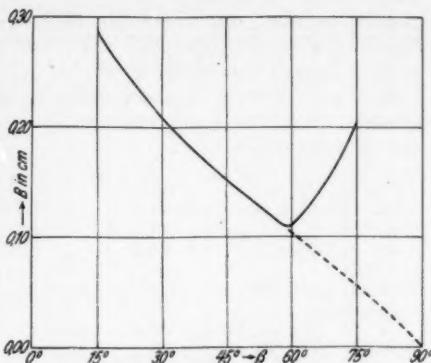


Fig. 9. Die Breite der Interferenzlinien am Kegelreflexionsdiagramm in Abhängigkeit von β

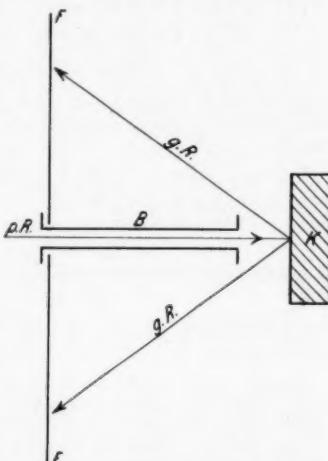


Fig. 10. Schematische Darstellung des Planfilmreflexionsverfahrens.

1) Im folgenden wird dieser Bereich auch öfter „Bereich der Divergenz Null“ genannt.

2) G. Sachs u. J. Weerts, Ztschr. Phys. 64. S. 344–358. 1930; F. Regler, Ztschr. Phys. 71. S. 371 bis 388. 1931.

gekürzt werden, da, wie schon eingangs erwähnt, dieses Verfahren nur einen Spezialfall des Kegelreflexionsverfahrens darstellt. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen in Abschn. I haben wir einfach in allen Formeln $\alpha = 90^\circ$ zu setzen und erhalten dann bei Gültigkeit der Einschränkungen (4) und (5) die Gleichungen:

$$(10) \quad R = c \operatorname{tg}(\beta - \psi) + a \operatorname{tg} \psi - r,$$

oder, für $\operatorname{tg} \psi = \psi$ gesetzt,

$$(11) \quad R = \frac{a \psi^2 \operatorname{tg} \beta + \psi(a - c - r \operatorname{tg} \beta) + c \operatorname{tg} \beta - r}{\psi \operatorname{tg} \beta + 1},$$

woraus sich für das Extremum von R_i die Gleichung herleiten läßt:

$$(12) \quad \psi^2 + 2\psi \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{a \operatorname{tg} \beta} \left(\frac{a - c}{\operatorname{tg} \beta} - c \operatorname{tg} \beta \right) = 0.$$

Mit diesen Gleichungen sollen zwei Beispiele durchgerechnet werden, die den Einfluß der Filmpräparatdistanz vor Augen führen, nämlich:

a) $a = 7,5$ cm,

$c = 7,5$ cm,

$b = 5,7$ cm,

$2r = 2r' = 0,21$ cm.

b) $a = 7,5$ cm,

$c = 4$ cm,

$b = 5,7$ cm,

$2r = 2r' = 0,21$ cm.

Im Falle a sind die Daten gegenüber dem Beispiel im I. Abschn. dieselben, während im Falle b nur die Film-Präparatdistanz eine Änderung erfuhr. Die Ergebnisse dieser Rechnungen fassen wir in den nachfolgenden Tabellen zusammen. Tab. 6a bzw. 7a beinhaltet die errechneten Werte von R_i bzw. R_a für den Fall a, Tab. 6b und 7b dagegen die entsprechenden Werte für den Fall b.

Tabelle 6a

ψ	R_i in cm für				
	$\beta = 10^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 60^\circ$
- 0,0875	1,249	1,969	4,490	8,177	15,323
- 0,0699	1,241	1,953	4,430	7,999	14,748
- 0,0524	1,234	1,939	4,373	7,832	14,222
- 0,0349	1,228	1,926	4,320	7,676	13,739
- 0,0175	1,222	1,915	4,270	7,530	13,295
0,0000	1,217	1,905	4,226	7,395	12,886
0,0175	1,214	1,896	4,184	7,269	12,509
0,0349	1,211	1,889	4,145	7,151	12,159
0,0524	1,209	1,883	4,109	7,041	11,837
0,0699	1,208	1,877	4,077	6,939	11,539
0,0875	1,208	1,874	4,049	6,845	11,263

Tabelle 7a

ψ	R_a in cm für				
	$\beta = 10^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 60^\circ$
- 0,0875	1,459	2,179	4,700	8,387	15,533
- 0,0699	1,451	2,163	4,640	8,209	14,958
- 0,0524	1,444	2,149	4,583	8,042	14,432
- 0,0349	1,438	2,136	4,530	7,886	13,949
- 0,0175	1,432	2,127	4,480	7,740	13,505
0,0000	1,427	2,115	4,436	7,605	13,096
0,0175	1,424	2,106	4,394	7,479	12,719
0,0349	1,421	2,100	4,355	7,361	12,369
0,0524	1,419	2,093	4,319	7,251	12,047
0,0699	1,418	2,087	4,287	7,149	11,749
0,0875	1,418	2,084	4,259	7,055	11,473

Tabelle 6b

ψ	R_i in cm für						
	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 40^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 50^\circ$	$\beta = 55^\circ$	$\beta = 60^\circ$
- 0,0875	0,695	2,040	3,239	4,006	4,951	6,167	7,817
- 0,0699	0,748	2,069	3,233	3,972	4,876	6,028	7,572
- 0,0524	0,802	2,100	3,232	3,944	4,810	5,903	7,352
- 0,0349	0,856	2,133	3,235	3,923	4,753	5,793	7,156
- 0,0175	0,911	2,167	3,240	3,906	4,703	5,694	6,980
0,0000	0,967	2,204	3,256	3,895	4,662	5,608	6,823
0,0175	1,024	2,244	3,265	3,889	4,628	5,532	6,683
0,0349	1,080	2,284	3,282	3,887	4,599	5,465	6,558
0,0524	1,132	2,326	3,302	3,890	4,577	5,408	6,447
0,0699	1,197	2,370	3,325	3,896	4,561	5,359	6,350
0,0875	1,257	2,417	3,352	3,908	4,551	5,318	6,264

Tabelle 7b

ψ	R_a in cm für						
	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 40^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 50^\circ$	$\beta = 55^\circ$	$\beta = 60^\circ$
- 0,0875	0,905	2,250	3,449	4,216	5,161	6,377	8,027
- 0,0699	0,958	2,279	3,443	4,182	5,086	6,238	7,782
- 0,0524	1,012	2,310	3,442	4,154	5,020	6,123	7,562
- 0,0349	1,066	2,343	3,445	4,133	4,963	6,003	7,366
- 0,0175	1,121	2,377	3,450	4,116	4,913	5,904	7,090
0,0000	1,177	2,414	3,466	4,105	4,872	5,818	7,033
0,0175	1,234	2,454	3,476	4,099	4,838	5,742	6,893
0,0349	1,290	2,494	3,492	4,097	4,809	5,675	6,768
0,0524	1,342	2,536	3,512	4,100	4,787	5,618	6,657
0,0699	1,407	2,580	3,535	4,106	4,771	5,569	6,560
0,0875	1,467	2,627	3,562	4,118	4,761	5,528	6,474

Von einer graphischen Darstellung all dieser Kurven sei Abstand genommen, da sie im Vergleich zu den Figg. 3—6 kein grundsätzlich verschiedenes Aussehen zeigen. Wir erhalten nämlich für alle Winkel β im Falle a und für alle Winkel $\beta \geq 50^\circ$ im Falle b immer Kurven vom Typus der in Fig. 5 dargestellten Kurve. Für $\beta \leq 30^\circ$ im Falle b nehmen

die Kurven einen der Fig. 3 ähnlichen Verlauf, während die Kurven für $\beta = 40^\circ$ bzw. $\beta = 45^\circ$ ein Aussehen haben wie die im vorigen Abschnitt für $\beta = 55^\circ$ bzw. $\beta = 65^\circ$ (Fig. 6) dargestellten Kurven.

Vergleicht man den Gang der Werte für R in den beiden Tabellenreihen a und b, so erkennt man, daß im Falle a für alle berechneten Winkel β zwischen $\beta = 10^\circ$ und $\beta = 60^\circ$ der volle Divergenzwinkel zur Auswirkung kommt, wäh-

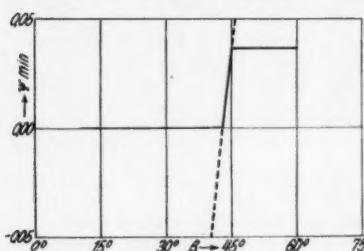


Fig. 11. Abhängigkeit des zur Bestimmung der Innenkanten der Interferenzlinien am Planfilmreflexionsdiagramm nötigen Divergenzwinkels ψ_{\min} vom Beugungswinkel β
(für das Beispiel b)

rend bei der Anordnung b die Divergenz erst bei einem Winkel β , der zwischen 40 und 45° liegt, Einfluß gewinnt. Wir berechnen daher in diesem Bereich für einige Winkel β nach Gl. (12) das ψ_{\min} und erhalten so den nach Tab. 8 in Fig. 11 dargestellten Kurvenzug für die zur Berechnung von R_{\min} nötigen Divergenzwinkel ψ_{\min} .

Tabelle 8

β	40°	43°	45°	47°	50°
ψ_{\min}	-0,056	-0,002	0,033	0,066	0,114

Da der Charakter dieser Kurve derselbe ist, wie der der entsprechenden Kurve des vorigen Abschnittes, gelten auch hier alle diesbezüglichen Überlegungen, die wir folgendermaßen zusammenfassen können.

Zur Zeichnung der *Innenkanten* der Interferenzkreise kommt bis $\beta = 43,1^\circ$ die Divergenz überhaupt nicht zur Geltung. Bei $\beta = 43,1^\circ$ setzt der Einfluß der Divergenz ein. Der Divergenzwinkel nimmt bis $\beta = 45^\circ$ von 0 auf seinen durch die Blendendimensionen bestimmten Maximalwert 0,0368

zu, um dann für größere Winkel β konstant diesen Wert beizubehalten.

Bezüglich der Außenkanten der Interferenzkreise lehren genauere Untersuchungen folgendes: Für alle Winkel $\beta \leq 42^\circ$ gibt $\psi_{\max} = 0$ den größten Wert für R_a , also R_{\max} , während für alle Winkel $\beta \geq 42^\circ$ $\psi_{\max} = -0,0368$ gesetzt werden muß. Für $\beta = 42^\circ$ liefern $\psi = 0$ und $\psi = -0,0368$ das gleiche Resultat.

Um auch hier eine Übersicht über den Einfluß der Verschiebung des Präparates bei der Anordnung b zu gewinnen, ergeben die gleichen Überlegungen wie im Abschn. I, daß bei einem Winkel β , der durch die Gleichung

$$(13) \quad \operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{a - c}{c}}$$

definiert ist, der Beginn der Verbreiterung der Innenkante des Interferenzkreises zufolge der Divergenz zu suchen ist. Für den untersuchten Fall b entnehmen wir der Tab. 9, daß bei einer Verschiebung des Präparates um 2 cm eine Verschiebung dieses Winkels β gegen die kleinen Winkel um $6,42^\circ$ stattfindet.

Tabelle 9

a	7 cm	7,5 cm	8 cm	8,5 cm	9 cm
β	$45,00^\circ$	$43,09^\circ$	$41,41^\circ$	$39,92^\circ$	$38,58^\circ$

Wie im vorigen Kapitel berechnen wir für den Fall a und b die Abweichungen der unter Berücksichtigung der Divergenz errechneten Werte von den Werten, die man unter Zugrundelegung streng paralleler Röntgenstrahlung erhalten würde, und erhalten, wenn wir alle Bezeichnungen beibehalten, die Tab. 10a für den Fall a und die Tab. 10b für den Fall b.

Tabelle 10a

β	R_{\max} in cm	R_{\min} in cm	ΔR_{\max} in cm	ΔR_{\min} in cm	B in cm
10°	1,438	1,211	0,011	-0,006	0,227
15°	2,137	1,888	0,022	-0,017	0,249
30°	4,538	4,139	0,102	-0,085	0,399
45°	7,902	7,138	0,297	-0,257	0,764
60°	14,000	12,123	0,904	-0,763	1,877

Tabelle 10b

β	R_{\max} in cm	R_{\min} in cm	ΔR_{\max} in cm	ΔR_{\min} in cm	B in cm
15°	1,177	0,967	0	0	0,210
30°	2,414	2,204	0	0	0,210
40°	3,466	3,256	0	0	0,210
45°	4,136	3,887	0,021	- 0,008	0,249
50°	4,968	4,595	0,096	- 0,067	0,373
55°	6,021	5,455	0,203	- 0,153	0,566
60°	7,400	6,539	0,367	- 0,284	0,861

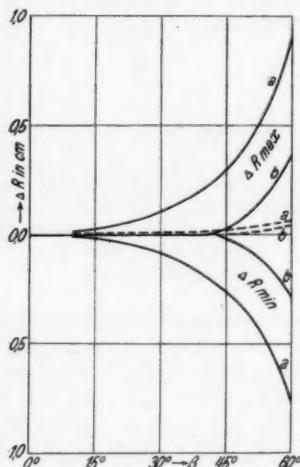


Fig. 12. Die durch die Divergenz der primären Röntgenstrahlung verursachten Verbreiterungen ΔR der Interferenzlinien am Planfilmreflexionsdiagramm in Abhängigkeit von β (Kurven a für das Beispiel a, Kurven b für das Beispiel b).

ΔR_{\min} = Verbreiterung der Innenkanten, ΔR_{\max} = Verbreiterung der Außenkanten, gestrichelte Kurve = Verschiebung der Linienmitte

Die graphische Darstellung dieser Abhängigkeit liefert die Fig. 12 (Kurvenzüge a für das Beispiel a, Kurven b für das Beispiel b) aus welcher wir erkennen können, daß für alle Interferenzkreise die Verschiebung der Außenkanten stets größer ist als die Verschiebung der Innenkanten. Die Größe dieses Unterschiedes wächst

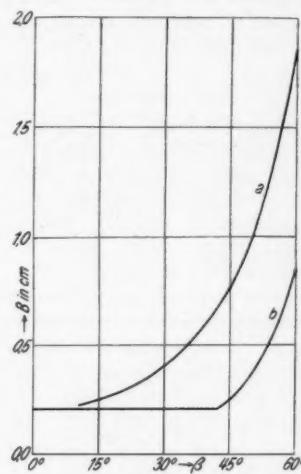


Fig. 13. Die Breite der Interferenzlinien am Planfilmreflexionsdiagramm in Abhängigkeit von β (Kurve a für Beispiel a, Kurve b für Beispiel b)

Die graphische Darstellung dieser Abhängigkeit liefert die Fig. 12 (Kurvenzüge a für das Beispiel a, Kurven b für das Beispiel b) aus welcher wir erkennen können, daß für alle Interferenzkreise die Verschiebung der Außenkanten stets größer ist als die Verschiebung der Innenkanten. Die Größe dieses Unterschiedes wächst

ständig mit zunehmendem Winkel β , was den Kurven für das arithmetische Mittel aus ΔR_{\max} und ΔR_{\min} (in der Fig. 12 gestrichelt gezeichnet) zu entnehmen ist.

Ein gegenüber der entsprechenden Kurve beim Kegelreflexionsverfahren vollkommen anderes Verhalten zeigt die Abhängigkeit der *Linienbreite* B vom Winkel β . Wir sehen nämlich aus der Tab. 10a und der Fig. 13 für den Fall a (Kurve a), daß die Linienbreite mit steigendem Winkel β ständig zunimmt, und zwar zuerst langsamer, um dann bei ungefähr $\beta = 30^\circ$ sehr stark anzusteigen.

Die entsprechende Abhängigkeit für den Fall b zeigt Tab. 10b und Fig. 13 (Kurve b), aus denen zu entnehmen ist, daß die Linienbreite zunächst konstant den Wert des Blenden-durchmessers hat (Bereich des Divergenzwinkels $\psi = 0$), während sie dann von $\beta = 42^\circ$ an zuerst langsamer, dann aber ebenfalls rascher zunimmt.

III. Berechnungen für das Zylinderreflexionsverfahren

Beim Zylinderreflexionsverfahren¹⁾ (Fig. 14) dient ein um den Zentralstrahl als Achse zylindrisch angeordneter Film zur Registrierung der Röntgeninterferenzen. Wir bezeichnen mit:

- a den senkrechten Abstand der Vorderblende vom Präparat,
- b die Länge der Kreisblende,
- $2r$ den Durchmesser der Vorderblende,
- $2r'$ den Durchmesser der rückwärtigen Blende,
- 2ϱ den Durchmesser des Filmzyinders

und wählen als Nullmarke, von der aus die Vermessung der Distanzen der Interferenzlinien erfolgen soll, den Schnitt der zum Zentralstrahl senkrechten durch die vordere Blende gelegten Ebene mit dem Filmzyinder. Ist wieder ψ der Divergenzwinkel, β das Supplement von 2ϑ und R der Abstand des Aufstreffpunktes P des gebogenen Röntgenstrahles auf dem Filmzyinder von der Nullmarke 0, dann kann aus der Skizze der Fig. 15 leicht die Beziehung erkannt werden.

$$(14) \quad R = a - (\varrho - a \operatorname{tg} \psi + r) \operatorname{ctg} (\beta - \psi).$$

Setzen wir wieder $\operatorname{tg} \psi = \psi$, so folgt

$$(15) \quad R = a - \frac{\varrho + r + \psi(\varrho \operatorname{tg} \beta + r \operatorname{tg} \beta - a) - a \psi^2 \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \psi}$$

1) F. Regler, Phys. Ztschr. 33, S. 438. 1932; Bericht auf der II. Internationales Schienentagung in Zürich, 16.—19. Juni 1932, S. 192.

mit dem Extremum für R_i , das nach Gleichung

$$(16) \quad \psi^2 - 2 \psi \operatorname{tg} \beta + \frac{2(\varrho + r)}{a \sin 2\beta} - 1 = 0$$

zu ermitteln ist. Die Einschränkungen für ψ [Ungleichungen (4) und (5)] bleiben unverändert.

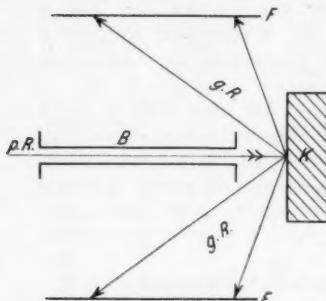


Fig. 14. Schematische Darstellung des Zylinderreflexionsverfahrens.

B = Blende, F = Film, K = Probekörper, $p.R$ = primärer Röntgenstrahl, $g.R$ = gebogter Röntgenstrahl

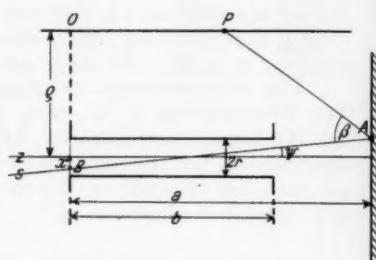


Fig. 15. Schema zur Ableitung der Gleichungen für das Zylinderreflexionsverfahren

Wieder soll die Auswirkung der Divergenz auf die Abstände der Innen- und Außenkanten an einem praktischen Beispiel studiert werden.

Es werde $a = 7,5$ cm; $b = 5,7$ cm; $2r = 2r' = 0,21$ cm; $\varrho = 2,5$ cm gewählt und nach Gl. (14) die Abhängigkeit der R_i bzw. R_a von ψ bestimmt (Tab. 11 und 12).

Tabelle 11

ψ	R _i in cm für							
	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 25^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 60^\circ$	$\beta = 70^\circ$	$\beta = 75^\circ$	$\beta = 85^\circ$
-0,0875	-1,460	1,851	2,842	4,764	5,979	6,626	6,925	7,500
-0,0699	-1,589	1,854	2,860	4,780	5,974	6,603	6,892	7,465
-0,0524	-1,727	1,861	2,883	4,801	5,972	6,583	6,863	7,395
-0,0349	-1,877	1,873	2,912	4,827	5,976	6,568	6,838	7,350
-0,0175	-2,042	1,890	2,946	4,858	5,983	6,558	6,818	7,309
0,0000	-2,222	1,914	2,988	4,895	5,996	6,552	6,802	7,272
0,0175	-2,423	1,943	3,037	4,938	6,013	6,550	6,790	7,240
0,0349	-2,649	1,980	3,093	4,987	6,036	6,553	6,784	7,212
0,0524	-2,906	2,025	3,159	5,043	6,064	6,561	6,781	7,189
0,0699	-3,203	2,080	3,234	5,107	6,097	6,574	6,784	7,170
0,0875	-3,552	2,146	3,321	5,177	6,135	6,591	6,791	7,156

Tabelle 12

ψ	R _a in cm für							
	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 25^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 60^\circ$	$\beta = 70^\circ$	$\beta = 75^\circ$	$\beta = 85^\circ$
-0,0875	-0,883	2,215	3,142	4,940	6,077	6,682	6,962	7,500
-0,0699	-0,979	2,233	3,172	4,962	6,076	6,663	6,932	7,449
-0,0524	-1,081	2,256	3,207	4,990	6,079	6,648	6,907	7,403
-0,0349	-1,190	2,286	3,248	5,022	6,087	6,637	6,887	7,361
-0,0175	-1,309	2,321	3,296	5,061	6,100	6,630	6,870	7,323
0,0000	-1,438	2,364	3,352	5,105	6,117	6,628	6,858	7,290
0,0175	-1,580	2,415	3,416	5,156	6,140	6,631	6,851	7,262
0,0349	-1,740	2,475	3,488	5,212	6,167	6,638	6,848	7,238
0,0524	-1,918	2,545	3,571	5,277	6,200	6,650	6,850	7,219
0,0699	-2,123	2,627	3,665	5,348	6,238	6,667	6,856	7,204
0,0875	-2,361	2,723	3,771	5,428	6,282	6,689	6,867	7,193

Von einer graphischen Darstellung dieser Abhängigkeit werde auch hier abgesehen, da die Kurven ausnahmslos einen ähnlichen Verlauf zeigen, wie die in Figg. 3 bis 6 dargestellten.

Man sieht sofort

aus den beiden Tabellen, daß für die Innenkanten 2 Bereiche vorliegen, auf welche die Divergenz Einfluß nimmt, nämlich unterhalb $\beta = 25^\circ$ und oberhalb $\beta = 60^\circ$. Errechnet man nach Gl. (16) den zur Bestimmung der Innenkanten nötigen Winkel ψ_{\min} in der Umgebung dieser beiden

Stellen, so folgt Tab. 13, oder graphisch dargestellt Fig. 16, in welcher der voll ausgezogene Linienzug die durch die Aufnahmebedingungen möglichen Winkel ψ_{\min} abzulesen gestattet.

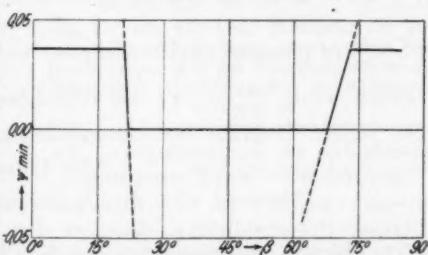


Fig. 16. Abhängigkeit des zur Bestimmung der Innenkanten der Interferenzlinien am Zylinderreflexionsdiagramm nötigen Divergenzwinkels ψ_{\min} vom Beugungswinkel β

Tabelle 13

β	20°	21°	23°	24°	62°	65°	69°	75°
ψ_{\min}	0,136	0,054	-0,039	-0,066	-0,043	-0,022	0,008	0,053

Wir erkennen daraus, daß für die Innenkanten der Interferenzlinien der Divergenzwinkel bei den kleinen Winkeln β bis $\beta = 21,0^\circ$ seinen größten Wert erhält. Von $\beta = 21,0^\circ$

bis $\beta = 22,0^\circ$ sinkt der Divergenzwinkel sehr rasch auf Null, welchen Wert er bis $\beta = 68,0^\circ$ beibehält. Es ist also der Bereich von $\beta = 22,0^\circ$ bis $\beta = 68,0^\circ$ frei vom Einfluß der Divergenz. Bei $\beta = 68,0^\circ$ bis ungefähr $\beta = 73^\circ$ erfolgt wieder eine Zunahme des Divergenzwinkels auf seinen Höchstwert, den er dann für größere Winkel β nicht mehr ändert.

Der Divergenzwinkel für die *Außenkanter* zeigt die schon von den Beispielen bei den anderen Rückstrahlverfahren her bekannte Unstetigkeit. Bis $\beta = 20,15^\circ$ hat er den Wert $-0,0368$. Von $\beta = 20,15^\circ$ an bis $\beta = 67,6^\circ$ ist $\psi_{\max} = 0$, um dann für größere β wieder den ersten Wert $-0,0368$ anzunehmen.

Wie sich die beiden Divergenzbereiche bei anderer Wahl der *Abstandsbedingungen* und *Kameradaten* gegeneinander verschieben, lehrt wieder die Überlegung, daß in Gl. (16) für $\psi = 0$ das konstante Glied den Wert Null erhalten muß. Wir erhalten so die Gleichung

$$(17) \quad \sin 2\beta = \frac{2(\varrho + r)}{a}.$$

Diese hat offenbar zwei Lösungen, wenn $\frac{2(\varrho + r)}{a} < 1$, eine Lösung, wenn $\frac{2(\varrho + r)}{a} = 1$ und keine Lösung, wenn $\frac{2(\varrho + r)}{a} > 1$. Die beiden Divergenzbereiche werden also um so näher beieinander liegen, je näher $\frac{2(\varrho + r)}{a}$ an 1 liegt. Ist der Filmdurchmesser vermehrt um den Blendendurchmesser größer als die Blenden-Präparatdistanz, dann ist die Divergenz im ganzen Winkelbereich von $\beta = 0$ bis $\beta = 90^\circ$ wirksam.

Wir untersuchen mittels Gl. (17) für das Beispiel nur die *Distanzabhängigkeit* und lassen die anderen Kameradaten unverändert. Mit β_1 soll immer der kleinere Winkel, mit β_2 , dagegen der größere Winkel bezeichnet werden, die für eine Distanzänderung von 2 cm aus Tab. 14 zu entnehmen sind. Demnach verschiebt sich der Beginn der Divergenz Null gegen

Tabelle 14

<i>a</i>	β_1	β_2
7 cm	24,05°	65,95°
7,5 "	22,00°	68,00°
8 "	20,32°	69,68°
8,5 "	18,90°	71,10°
9 "	17,69°	72,31°

die größeren Winkel β hin, während das Ende dieses Bereiches die entgegengesetzte Tendenz zeigt.

Bezüglich der Abweichungen ΔR_{\max} und ΔR_{\min} kann aus Tab. 15 und Fig. 17 erkannt werden, daß bei kleinen Winkeln β die Verbreiterung nach innen größer ist als nach außen, während sie im zweiten Divergenzbereich der großen Winkel nach außen überwiegt. Die gestrichelten Kurvenzüge sind wieder durch Bildung des arithmetischen Mittels aus ΔR_{\max} und ΔR_{\min} entstanden.

Die errechneten **Linienbreiten** B sind ebenfalls in Tab. 15 eingetragen und in

Abhängigkeit vom Winkel β graphisch in Fig. 18 dargestellt. Diese Kurve ähnelt dem Verlauf nach sehr der Kurve der Fig. 9. Die Linienbreite, die für kleine Winkel β (etwa 15°) einen sehr hohen Wert hat, nimmt rasch ab, erreicht zwischen $\beta = 65^\circ$ und $\beta = 70^\circ$ ein Minimum und steigt schließlich wieder an.

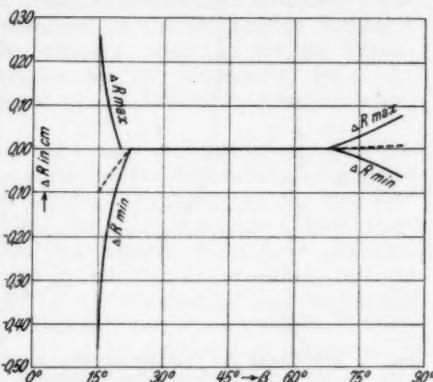


Fig. 17. Die durch die Divergenz der primären Röntgenstrahlung verursachten Verbreiterungen ΔR der Interferenzlinien am Zylinderreflexionsdiagramm in Abhängigkeit von β .

ΔR_{\min} = Verbreiterung der Innenkanten,
 ΔR_{\max} = Verbreiterung der Außenkanten,
 gestrichelte Kurve = Verschiebung
 der Linienmitte

Tabelle 15

β	R_{\max} in cm	R_{\min} in cm	ΔR_{\max} in cm	ΔR_{\min} in cm	B in cm
15°	-1,178	-2,678	0,260	-0,456	1,500
25°	2,364	1,914	0,000	0,000	0,450
30°	3,352	2,988	0,000	0,000	0,364
45°	5,105	4,895	0,000	0,000	0,210
60°	6,117	5,996	0,000	0,000	0,121
70°	6,638	6,550	0,010	-0,002	0,088
75°	6,888	6,783	0,030	-0,019	0,105
85°	7,366	7,209	0,076	-0,063	0,157

Die theoretische Kurve für die Linienbreite unter Vernachlässigung der Divergenz ist gestrichelt eingezeichnet.

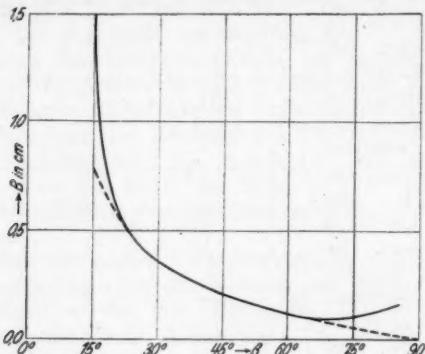


Fig. 18. Die Breite der Interferenzlinien am Zylinderreflexionsdiagramm in Abhängigkeit von β

IV. Diskussion der Ergebnisse

Welche Folgerungen sind nun nach diesen Berechnungen auf die praktische Anwendbarkeit der drei Rückstrahlverfahren zu ziehen? Wir wollen die nachfolgenden Überlegungen zunächst für ein *störungsfreies Kristallgitter* durchführen und vorerst den Einfluß der Divergenz auf die *Präzisionsbestimmung von Gitterparametern* festlegen. Wie wir gesehen haben, existiert bei allen drei Verfahren meist ein Bereich, in dem die Divergenz überhaupt nicht wirksam ist, immer aber ein Bereich, in dem die Divergenz eine Verbreiterung der Interferenzlinien hervorruft. Um die Präzision bei der Gitterparameterbestimmung zu erhöhen, ist die Vermessung mehrerer Interferenzlinien zweckmäßig. Es kann nun vorkommen, daß einige Interferenzlinien im Bereich der Divergenz Null liegen, während andere in das Intervall fallen, in dem die Divergenz zur Auswirkung gelangt. Vermißt man, wie es meist geschieht, die Lage der Linienmitten, dann dürfen offenbar nur solche Interferenzlinien direkt zueinander in Beziehung gebracht werden, die im divergenzfreien Bereich liegen. Beim Vergleich mit Linien aus dem anderen Bereich kann man leicht zu Fehlresultaten kommen, da, wie wir bei allen drei Rückstrahlmethoden gesehen haben, die durch die Divergenz verursachte Verbreiterung der Interferenzlinien ungleichmäßig nach beiden Seiten erfolgt, und zwar ist die Verbreiterung der Außen-

kanten der Linien meist größer als die der Innenkanten. Es wird also durch die Divergenz eine Verschiebung der Linienmitten gegen die größeren Winkel β vorgetäuscht und würde demnach ein zu großer Netzebenenabstand resultieren. Nur beim Zylinderreflexionsverfahren ist für die kleinen Winkel β die Verbreiterung der Innenkanten größer als die der Außenkanten, so daß eine Verschiebung der Linienmitte gegen die kleinen Winkel β und damit ein zu kleiner Netzebenenabstand folgen würde.

Bezüglich der Größenordnung der Fehler in der Bestimmung des Netzebenenabstandes bei Außerachtlassung dieser Erfahrungen können wir bei den Beispielen für die drei Verfahren folgendes feststellen. Da sich ein solcher Fehler naturgemäß am wenigsten bei den kleinen Winkel β auswirkt, lesen wir zunächst für das Zylinderreflexionsverfahren aus der gestrichelten Kurve der Fig. 17 für die Verschiebung der Linienmitte gegen die kleinen Winkel β bei $\beta = 15^\circ$ einen Zahlenwert 0,098 cm, für $\beta = 20^\circ$ einen solchen von 0,027 cm ab. Berechnen wir nun den prozentualen Fehler, der sich bei der Bestimmung des Netzebenenabstandes aus der Lage der Linienmitte ergeben würde, so erhalten wir bei $\beta = 15^\circ$ 0,13%, bei $\beta = 20^\circ$ dagegen 0,06%, also Fehler, die schon die dritte Dezimale beeinflussen und bei Präzisionsbestimmungen keineswegs mehr vernachlässigt werden dürfen. Noch größer sind naturgemäß diese Fehler für die großen Winkel β . Wir erhalten nämlich beim Kegelreflexionsverfahren für $\beta = 75^\circ$ einen Fehler von 0,15%, beim Zylinderreflexionsverfahren einen solchen von 0,16%. Schätzen wir ebenso den Fehler für die beiden Beispiele nach dem Planfilmreflexionsverfahren ab, so folgt für das Beispiel *b*, also bei relativ kleiner Film-Präparatdistanz, für einen Winkel $\beta = 45^\circ$ ein Fehler in der Bestimmung des Netzebenenabstandes von 0,05%, bei $\beta = 60^\circ$ sogar ein solcher von 0,30%. Besonders interessant sind die Resultate für das Beispiel *a*, die in der folgenden Tab. 16 zusammengestellt sind.

Tabelle 16

β	15°	30°	45°	60°
Fehler in %	0,01	0,03	0,08	0,27

Wir sehen daraus, daß der prozentuale Fehler bei der Bestimmung des Netzebenenabstandes aus der Linienmitte ohne Berücksichtigung der Divergenz mit zunehmendem Winkel β steigt. Aus all diesen Betrachtungen folgt also, daß aus der

Linienmitte direkt ohne Kenntnis des wirksamen Divergenzwinkels eine „Präzisionsbestimmung“ vor Gitterparametern unmöglich ist.

Es ist daher für die Auswertung von großem Vorteil, wenn der Bereich, in dem die Divergenz keinen Beitrag zur Verbreiterung der Linien liefert, möglichst groß ist. Dies ist aber nur beim Kegelreflexionsverfahren (für den untersuchten Fall bis ungefähr $\beta = 58^\circ$) und beim Zylinderreflexionsverfahren (von $\beta = 22^\circ$ bis $\beta = 67^\circ$) der Fall, während beim Planfilmreflexionsverfahren die Film-Präparatdistanz relativ klein gewählt werden muß, um überhaupt einen Bereich der Divergenz Null zu erhalten. Dazu kommt noch, daß beim Kegelreflexionsverfahren bei einem relativ kleinen Weg der gebeugten Röntgenstrahlen die Meßlängen am Film relativ groß sind. Es sind daher bei gleichen Meßlängen die Belichtungszeiten beim Kegelreflexionsverfahren kürzer als beim Planfilmreflexionsverfahren. Von großer Wichtigkeit bei Vermessung mehrerer Linien ist ferner die gleichmäßige Schwärzung all dieser Linien, welche Bedingung in weitgehendem Maße nur beim Kegelreflexionsverfahren erfüllt ist, da hier durch geeignete Wahl des Kegelwinkels die Wege der gebeugten Strahlen möglichst gleich gehalten werden können. Immerhin dürften auch beim Zylinderreflexionsverfahren von $\beta = 30^\circ$ an noch angenähert befriedigende Resultate erhalten werden. Beim Planfilmreflexionsverfahren dagegen stehen die Wege, die die gebeugten Strahlen bis zum Schnitt mit dem Film zurücklegen müssen, in umgekehrtem Verhältnis der $\cos \beta$. Es ist z. B. der Weg für $\beta = 60^\circ$ angenähert doppelt so groß als der Weg für $\beta = 25^\circ$. Unter Annahme eines linearen Schwärzungsgesetzes und unter Zugrundelegung des Quadratgesetzes, das aber für langwellige Röntgenstrahlen, wie sie für derartige Untersuchungen ausschließlich Verwendung finden, keine Gültigkeit mehr hat, wäre die Schwärzung der Linie unter $\beta = 60^\circ$ ein Viertel der Schwärzung der Linie unter $\beta = 25^\circ$. Dazu kommt noch die durch die Divergenz hervorgerufene Zerstreuung der Intensität auf einen größeren Bereich (Linienbreite bei $\beta = 60^\circ$ angenähert viermal so groß als bei $\beta = 30^\circ$), wodurch ebenfalls eine bedeutende Schwächung der Flächenintensität eintritt¹⁾; ferner die durch den schief auftreffenden Röntgenstrahl hervorgerufene höhere Absorption im Träger der Filmschichten. Nach diesen Überlegungen, sowie daraus, daß der Radius der

1) Beim Beispiel für das Kegelreflexionsverfahren dagegen ist die Breite der Interferenzlinie unter $\beta = 60^\circ$ ungefähr die Hälfte der Breite unter $\beta = 30^\circ$.

Interferenzkreise sich proportional $\operatorname{tg} \beta$ ändert, ist auch die relativ große Linienarmut der Diagramme nach dem Planfilmreflexionsverfahren erklärlich, da es kaum möglich sein wird, einen Winkelbereich als bis $\beta = 45^\circ$ gleichmäßig zu erfassen.

Das Kegelreflexionsverfahren hat vor den beiden anderen Verfahren noch den Vorteil, daß innerhalb relativ weiter Grenzen durch eine Änderung der Kegelscheitel-Präparatdistanz die Lage des Divergenzbereiches nicht wesentlich verschoben wird, eine Erkenntnis, auf die wir im folgenden Abschnitt noch zurückkommen werden.

Während sich für ungestörte Kristallgitter der Netzebenenabstand im Gebiet der Divergenz Null bei allen drei Rückstrahlverfahren aus der Linienmitte errechnen läßt, ist für gestörte Kristallgitter diese einfache Berechnung nicht mehr zulässig. Schon F. Regler¹⁾ konnte für das Kegelreflexionsverfahren unter Annahme einer gleichmäßigen Schwankung des Interferenzwinkels um einen Betrag $\Delta\beta$ vom ursprünglichen Winkel nachweisen, daß die dadurch hervorgerufenen Verbreiterungen der Interferenzlinien von der Linienmitte nach beiden Seiten voneinander verschieden sind. Nun ist aber, wie Verf. an anderer Stelle zeigen wird, diese Voraussetzung der gleichmäßigen Schwankung des Interferenzwinkels in Wirklichkeit nicht immer zutreffend, da die Richtung und Größe dieser Schwankung abhängig vom Grad der Verformung von Netzebene zu Netzebene variiert. Aus all diesen Tatsachen folgt also, daß aus der Vermessung der Linienmittten auf einen mittleren Netzebenenabstand oder auf den Netzebenenabstand des Materials im störungsfreien Zustand überhaupt nicht geschlossen werden kann. Naturgemäß kann dann aber auch von einem „mittleren Gitterparameter“ nicht mehr gesprochen werden.

Um aus der Interferenzlinienbreite die Größe der Kristallgitterstörungen bestimmen zu können, ist eine deutliche Vermeßbarkeit der Interferenzlinien unbedingte Voraussetzung. Die Schärfe des beiderseitigen Abbruches der Schwärzung wird nun sehr durch den Einfluß der Divergenz gestört, da ja, wie schon erwähnt, die Linienintensität auf einen größeren Bereich aufgeteilt wird. So kann durch die Überlagerung von Kristallgitterstörungen und Divergenz die Begrenzung der Interferenzlinien so geschwächt werden, daß die Linien dann als unscharf bezeichnet werden müssen. Man muß also nach Möglichkeit trachten, daß die zu untersuchende Interferenzlinie in den

1) F. Regler, Ztschr. Phys. 74, S. 547—564. 1932.

Bereich der Divergenz Null zu liegen kommt, eine Bedingung, die — wenigstens beim Kegelreflexionsverfahren — durch geeignete Wahl der Kameradaten und der Wellenlänge der verwendeten Röntgenstrahlung fast immer erfüllt werden kann.

V. Die praktische Auswertung der Diagramme

a) Auswertung bei bekannter Blenden-Film-Präparatdistanz

In den ersten drei Abschnitten wurden für die drei Rückstrahlverfahren zur Bestimmung des Abstandes der Interferenzlinien von einer Meßmarke Formeln abgeleitet, die von den Kameradaten, dem Beugungswinkel und dem Divergenzwinkel abhängen. Es sind dies die Gl. (3) und (6) für das Kegelreflexionsverfahren, die Gl. (10) und (11) für das Planfilmreflexionsverfahren und die Gl. (14) und (15) für das Zylinderreflexionsverfahren. Um nun aus den auf dem Film vermessenen Distanzen den Winkel β bestimmen zu können, müssen wir aus diesen Gleichungen den Winkel β berechnen. Es folgt dann für das Kegelreflexionsverfahren:

$$(18) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\psi(a + R \cos \alpha - c) - R \sin \alpha - r}{R \cos \alpha - c + \psi(R \sin \alpha + r) - a \psi^2},$$

für das Planfilmreflexionsverfahren:

$$(19) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\psi(a - c) - R - r}{\psi(R + r) - a \psi^2 - c}$$

und für das Zylinderreflexionsverfahren:

$$(20) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{q + r - R \psi}{a - R - \psi(q + r) + a \psi^2}.$$

Als Einschränkung gelten wieder die Beziehungen (4) und (5).

Zur Auswertung eines Diagrammes nach einem Rückstrahlverfahren ist es vorerst nötig, sich einen Überblick über die Auswirkung der Divergenz in dem untersuchten Winkelbereich zu verschaffen. Wir werden dabei zweckmäßig folgendermaßen vorgehen. Für die Kamera- und Aufnahmedaten sind zunächst mit Hilfe der Gl. (3), (10) bzw. (14) je nach dem verwendeten Verfahren ähnlich den durchgerechneten Beispielen Untersuchungen anzustellen, in welchem Bereich die Divergenz überhaupt wirksam ist. Für die *Innenkanten* kann der Beginn des Divergenzbereiches nach den Gl. (8), (13) bzw. (17) festgestellt werden. Nun berechnet man in der Umgebung dieses so gefundenen Winkels β nach Gl. (7), (12) bzw. (16) die zugehörigen Divergenzwinkel ψ_{\min} , die nach den Ungleichungen (4) und (5) einzuschränken sind. Wir erhalten dann eine Kurve für ψ_{\min} in Abhängigkeit von β , wie sie in den Figg. 7, 11

und 16 gezeigt wurde. Für die *Außenkanten* ist die Stelle des Sprunges von der Divergenz Null zur maximalen Divergenz folgendermaßen festzustellen: Es muß der Winkel β gefunden werden, für den nach den Gl. (3), (10) bzw. (14) die für den Divergenzwinkel $\psi = 0$ berechnete Distanz der Außenkanten gleich wird dem mit der absolut größten Divergenz nach Einschränkung (5) erhaltenen Wert. Für alle β , die größer sind als dieser Winkel, ist in den Formeln der absolut größte Divergenzwinkel einzusetzen. Diese beiden Kurven für ψ_{\min} bzw. ψ_{\max} in Abhängigkeit von β wollen wir kurz die *Eichkurven* der Kamera nennen.

Es ist also jetzt die Kamera für eine bestimmte Blenden-Film-Präparatdistanz geeicht. Um nun einen ersten Überblick über die Größe des Interferenzwinkels zu erhalten, werden aus dem Röntgendiagramm der Abstand der Linienmitten von einer bestimmten eindeutig festgelegten Marke (beim Kegelreflexionsverfahren der Kegelscheitel, beim Planfilmreflexionsverfahren der Mittelpunkt der Interferenzkreise, beim Zylinderreflexionsverfahren eine erst zu definierende Nullmarke) vermessen und daraus ohne Berücksichtigung der Divergenz der Winkel β bestimmt. Nun wird nach der Eichkurve untersucht, in welchen Bereich der errechnete Winkel fällt, entweder in den Bereich der Divergenz Null (Bereich A) oder in das Intervall, in dem der Divergenzwinkel ansteigt (Bereich B) oder in den Bereich der Maximaldivergenz (Bereich C). Interferenzlinien, die in den Bereich A und C fallen, können bezüglich der Außen- und Innenkanten sofort ausgewertet werden, während wir bei der Berechnung des Interferenzwinkels aus der Innenkante einer Linie im Bereich B schrittweise vorgehen müssen. Es werde aus der Eichkurve der Kamera ein einem ersten Näherungswert β_0 entsprechender Divergenzwinkel ψ_1 abgelesen, mit dessen Hilfe wir nach einer in diesem Kapitel angegebenen Gleichung einen Winkel β_1 errechnen können. Für diesen Winkel β_1 finden wir aus der Eichkurve ein ψ_2 , das wieder nach der Gleichung einen Winkel β_2 liefert usw. Das Verfahren kann bis zu beliebiger Genauigkeit fortgesetzt werden, meist wird man aber schon mit einem Schritt sein Auslangen finden. Bezuglich der Außenkanten genügt ebenfalls die Entscheidung, ob der berechnete Winkel β in den Bereich der Divergenz Null oder der Maximaldivergenz fällt. Beim Zylinderreflexionsverfahren wird man auf den ersten Divergenzbereich zweckmäßig überhaupt verzichten, da hier die schief auftreffende gebeugte Strahlung die Vermeßbarkeit der Interferenzlinien störend beeinflussen kann.

Auch bei Vermessung der *Linienbreiten* wird man sich vorerst über den Winkel β orientieren müssen, um entscheiden zu können, ob für diesen Winkel die Divergenz wirksam ist oder nicht. Danach wird man dann, wenn nötig, die entsprechenden Korrekturen anbringen.

b) Auswertung

bei unbekannter Blenden-Film-Präparatdistanz

Bekanntlich liegt bei Rückstrahlauflnahmen die größte Schwierigkeit in der exakten Bestimmung der Abstände Blende-Präparat und Film-Präparat¹⁾), dagegen ist es ein leichtes, eine Verschiebung des Präparates um einen bestimmten Betrag genau zu vermessen. Nach den Überlegungen der vorigen Kapitel können wir nun für das *Kegelreflexionsverfahren* die genaue Bestimmung der Kegelscheitel-Präparatdistanz vermeiden. Wir haben nämlich im ersten Abschnitt gesehen, daß bei den verwendeten Aufnahmebedingungen eine Änderung des Kegelscheitel-Präparatabstandes um 2 cm den Bereich B gegen die großen Winkel β um nur 11 Bogenminuten verschiebt, daß also die Eichkurven innerhalb relativ weiter Grenzen keine Veränderungen erleiden. Man kann also bei Unkenntnis der Kegelscheitel-Präparatdistanz folgendermaßen verfahren. Es werden zwei Röntgendiagramme in verschiedenen Distanzen²⁾, deren Differenz ϵ genau bestimmt werden muß, angefertigt. Aus diesen können wir für zwei entsprechende Linien (Außen- oder Innenkanten) ein R_1 und R_2 ablesen, womit wir

$$(21) \quad R_1 - R_2 = A = \epsilon \frac{\operatorname{tg}(\beta - \psi) + \operatorname{tg} \psi}{\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg}(\beta - \psi)}$$

berechnen. Daraus folgt aber

$$(22) \quad \operatorname{tg} \beta = A \frac{\psi \cos \alpha - \sin \alpha}{A \cdot \cos \alpha + A \cdot \psi \sin \alpha - \epsilon(1 + \psi^2)},$$

eine Gleichung, in der nicht mehr die schwer zu bestimmenden Größen a und c , sondern nur mehr die exakt bekannte Verschiebung ϵ erscheint, so daß damit eine genaue Bestimmung des Winkels β möglich ist.

1) F. Wever und H. Möller umgehen diese Schwierigkeit durch Aufbringen eines Testobjektes (Gold) auf den zu untersuchenden Gegenstand. *Archiv für das Eisenhüttenwesen* 5. S. 215—218. 1931/32; *Mitteilung aus dem Kaiser Wilhelm-Institut f. Eisenforschung* XV. 6. S. 59 bis 69. 1933.)

2) Falls keine Gefahr einer Linienüberdeckung besteht, können diese beiden Diagramme auch auf *einem* Film aufgenommen werden.

Dieser Vorgang ist nicht ohne weiteres auf die beiden anderen Rückstrahlverfahren übertragbar, da, wie wir gesehen haben (Abschn. II und III), bei diesen beiden Verfahren eine Änderung der Blenden-Präparatdistanz die Lage des Divergenzbereiches stärker beeinflußt als beim Kegelreflexionsverfahren. Man muß sich vorerst durch Aufstellung der Eichkurven für die beiden Distanzen¹⁾ vergewissern, daß die zu untersuchenden Interferenzlinien in beiden Fällen entweder im Bereich der Divergenz Null oder im Bereich des größtmöglichen Divergenzwinkels liegen. Nur dann ist eine Anwendung der folgenden Formeln möglich. Es errechnen sich dann die Winkel β aus der Verschiebung der Blenden-Präparatdistanz ϵ und aus der gemessenen Differenz $R_1 - R_2 = \Delta$ für das *Planfilmreflexionsverfahren* zu

$$(23) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta}{\epsilon(1 + \psi^2) - \Delta \cdot \psi}$$

und für das *Zylinderreflexionsverfahren* zu

$$(24) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\varrho - \Delta \cdot \psi}{\epsilon(1 + \psi^2) - \varrho \psi - \Delta}.$$

Es ist also auch bei diesen Verfahren aber nur unter den erwähnten Bedingungen eine exakte Bestimmung des Winkels β ohne Kenntnis der genauen Blenden-Präparatdistanz möglich.

Zum Abschluß sei noch kurz gezeigt, wie die *Doppelschicht des Röntgenfilms* bei der Auswertung berücksichtigt werden muß. Nennen wir die dem Präparat zugekehrte Schicht die innere, die vom Präparat abgewendete Schicht die äußere und bezeichnen wir ferner mit α den Winkel zwischen der Filmfläche und dem Zentralstrahl, dann muß offenbar bei den Innenkanten für $(\alpha + \beta) > 90^\circ$ die innere, für $(\alpha + \beta) < 90^\circ$ die äußere Filmschicht in Rechnung gezogen werden, während für die Außenkanten die umgekehrten Beziehungen gelten. Waren alle Distanzbezeichnungen in den ersten drei Abschnitten auf die innere Schicht des Films bezogen, so sind diese Distanzen für die äußere Filmschicht wie folgt zu verändern: Beim Kegelreflexionsverfahren tritt an Stelle

$$\text{von } c \cdots c + \frac{d}{\sin \alpha},$$

beim Planfilmreflexionsverfahren an Stelle

$$\text{von } c \cdots c + d,$$

während beim Zylinderreflexionsverfahren ϱ zu $\varrho + d$ vergrößert erscheint, wenn d die Filmdicke bedeutet.

1) Für diese Distanzbestimmungen genügt eine Genauigkeit von ungefähr 0,1 cm.

Zusammenfassung

In vorliegender Arbeit werden für drei Rückstrahlverfahren, nämlich das Kegelreflexionsverfahren, das Planfilmreflexionsverfahren und das Zylinderreflexionsverfahren zur Berechnung der Interferenzwinkel aus den Außen- und Innenkanten der Interferenzlinien exakte Formeln abgeleitet, die die Divergenz der primären Röntgenstrahlung berücksichtigen. Die Gleichungen werden für den Fall bekannter Abstandsbedingungen berechnet und es wird ein Weg angegeben, der auch bei nicht genau bekannter Film-Präparatdistanz eine exakte Bestimmung der Interferenzwinkel ermöglicht.

Bei allen drei Verfahren wird an speziellen Beispielen der Einfluß der Divergenz auf die Verschiebung der Außen- und Innenkanten, sowie auf die Breite der Interferenzlinien gezeigt. Gleichungen, die zu einer theoretischen Berechnung von Eichkurven für den gesamten möglichen Winkelbereich führen, werden angegeben. Die Gleichungen besitzen Gültigkeit unabhängig von Kristallgitterstörungen des untersuchten Präparates.

Die drei Verfahren werden bezüglich ihrer praktischen Brauchbarkeit einer eingehenden Kritik unterworfen. Es wird gezeigt, daß das Kegelreflexionsverfahren die meisten Vorteile für die praktische Anwendung auf sich vereinigt.

Herrn Priv.-Doz. Dr. F. Regler danke ich herzlichst für seine wertvollen Anregungen und Ratschläge.

Wien.

(Eingegangen 11. November 1933)

Feldkombinationen zur Geschwindigkeits- und Massenspektrographie. I

Von Walter Henneberg

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG)

(Mit 4 Figuren)

Inhalt: Die Bahnen geladener Teilchen in einem homogenen Magnetfeld und dem elektrischen Felde eines Zylinderkondensators werden auf Fokussierung, Dispersion und Massentrennung untersucht.

Ein wenig divergierendes Bündel von Elektronen gleicher Geschwindigkeit, das senkrecht zu den Kraftlinien eines homogenen magnetischen Feldes (Fig. 1a) oder eines elektrischen

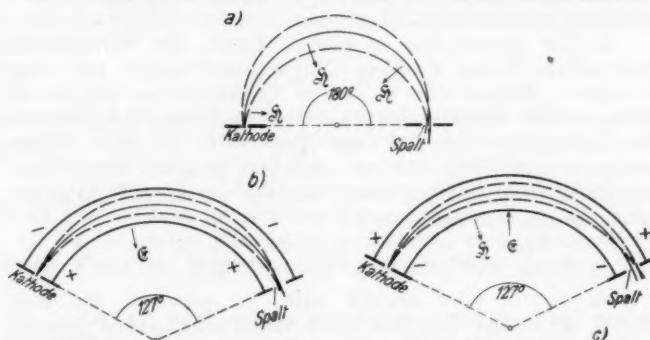


Fig. 1. Bahnen von Elektronen gleicher Geschwindigkeit
a) im homogenen Magnetfeld, b) im elektrischen Zylinderfeld,
c) im kombinierten elektrisch-magnetischen Feld. Die Pfeile
geben die Ablenkungsrichtung der Felder an

Zylinderfeldes (Fig. 1b) abgeschossen wird, wird nach einem bestimmten Winkel fokussiert, der beim magnetischen Feld 180° , beim elektrischen¹⁾ $127^\circ 17'$ beträgt. Der Fokussierungs-

1) A. L. Hughes, V. Rojanski, J. H. Mc Millen, Phys. Rev. 33, S. 1069. 1929; ders. u. V. Rojanski, ebenda 34, S. 284. 1929; ders. u. J. H. Mc Millen, ebenda 34, S. 291. 1929.

punkt eines Bündels von anderer Geschwindigkeit liegt an einer anderen Stelle, so daß die Möglichkeit gegeben ist, auf diese Weise ein Bündel von Elektronen verschiedener Geschwindigkeit oder ein Bündel gleich schneller Teilchen verschiedener Masse zu analysieren.

Bartky und Dempster¹⁾ haben kürzlich unter dem Gesichtspunkte der Massenspektroskopie auch die Überlagerung eines magnetischen und elektrischen Feldes (Fig. 1c) betrachtet und gefunden, daß man eine Fokussierung nach Richtung und Geschwindigkeit erhalten kann, und zwar wie im rein elektrischen Fall nach $127^\circ 17'$, wenn man dafür sorgt, daß das magnetische Feld der Zentrifugalkraft entgegenwirkt, daß elektrische Feld sie jedoch unterstützt und gerade ebenso große Wirkung hat wie sie. Bartky und Dempster betrachten nur einen Spezialfall. In dieser Arbeit sollen ihre Rechnungen erweitert und ganz allgemein die Überlagerung eines homogenen magnetischen und eines elektrischen Feldes unter dem Gesichtspunkte der Geschwindigkeits- und Massenanalyse geladener Teilchen untersucht werden. Wir werden finden, daß es außer dem erwähnten Spezialfall noch weitere, zur Spektrographie geeignete Feldkombinationen gibt.

1. Wir untersuchen zu diesem Zweck die Wirkung des elektrischen Feldes E eines Zylinderkondensators und eines homogenen Magnetfeldes H , dessen Kraftlinien parallel zu der Zylinderachse verlaufen, auf ein Teilchen²⁾ der Masse m und der Ladung e , das sich zur Zeit $t = 0$ in einer Ebene senkrecht zur Achse bewegen soll; das Teilchen bleibt dann ständig in der „Zeichenebene“. Führen wir darin Polarkoordinaten $r \varphi$ ein und setzen wir

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega; \quad \left| \frac{e}{m} H \right| = \hbar; \quad \pm \left| \frac{e}{m} E \right| = \frac{e}{r}$$

(e soll positiv oder negativ sein, je nachdem das elektrische Feld das Teilchen nach innen oder außen ablenkt), so lautet die radiale Bewegungsgleichung, wenn wir berücksichtigen, daß $v_{\text{tang}} = r\omega$:

$$(2) \quad \ddot{r} = r\omega^2 - \frac{e}{r} - \hbar r\omega.$$

Durch Integration aus dem Flächensatz: Die zeitliche Änderung des Drehmomentes ist gleich dem Moment der wirkenden Kraft, in Formeln:

$$m \frac{d}{dt} (r^2 \omega) = e r \dot{r} |H|$$

1) W. Bartky u. A. J. Dempster, *Phys. Rev.* **33**, S. 1019. 1929.
2) Das also ein Elektron oder ein Ion sein kann.

ergibt sich ferner als zweite Gleichung

$$(3) \quad r^2 \omega - \frac{1}{2} \hbar r^2 = [r^2 \omega - \frac{1}{2} \hbar r^2]_{t=0} = c.$$

Wenn das Teilchen zur Zeit $t = 0$ auch die elektrischen Kraftlinien senkrecht schneidet ($\dot{r} = 0$), so erhalten wir eine Kreisbahn¹⁾ $r = r_0$, sobald $\dot{r} \equiv 0$ ist, sobald also

$$(4) \quad r_0 \omega_0^2 = \frac{e}{r_0} + \hbar r_0 \omega_0,$$

wobei $r_0 \omega_0 = v_0$ die Anfangsgeschwindigkeit ist. Auflösung dieser Gleichung nach ω_0 :

$$(5) \quad \omega_0 = \frac{1}{2} \hbar \pm \sqrt{\frac{1}{4} \hbar^2 + \frac{e}{r_0^2}}$$

zeigt, daß zu gegebener Feldanordnung e , \hbar und gegebenem Abschußpunkt r_0 im allgemeinen zwei Werte der Winkelgeschwindigkeit ω_0 gehören, die eine stationäre Kreisbahn liefern. Diese zwei Werte entarten sowohl im Fall eines rein elektrischen Feldes ($\hbar = 0$; $\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{e}{r_0}}$) wie für rein magnetisches Feld [$e = 0$; $\omega_0 = \hbar$ oder 0^2]. Beide Werte fallen zusammen²⁾, wenn das elektrische Feld nach außen gerichtet ist und wenn dabei

$$(6) \quad e = - \frac{1}{4} \hbar^2 r_0^2.$$

Dann wird $\omega_0 = \frac{1}{2} \hbar$, und man erkennt aus (4), daß das elektrische Feld die dem magnetischen Feld entgegenwirkende Zentrifugalkraft $r_0 \omega_0^2 = \frac{1}{4} \hbar^2 r_0$ um den gleichen Betrag vermehrt. Für noch größeres nach außen gerichtetes elektrisches Feld gibt es dann bei gleichem \hbar und r_0 keine Kreisbahn mehr.

Die folgenden Entwicklungen nehmen eine besonders einfache Form an, wenn wir als Parameter die Größe y ein-

1) Alle auf die Kreisbahn bezüglichen Größen verstehen wir mit dem Index 0.

2) Der Fall $\omega_0 = 0$ entspricht bei unserer Ableitung einem anfangs ruhenden Teilchen ($v_0 = r_0 \omega_0 = 0$) im reinen Magnetfeld; das Teilchen bleibt dann auch weiterhin in Ruhe. Macht man jedoch den Grenzübergang $\omega \rightarrow 0$ bei festem v_0 , also $r_0 \rightarrow \infty$, und verlangt, daß $\frac{e}{r_0} = \pm \left| \frac{e}{m} \mathfrak{E} \right|$ endlich bleiben und konstant gleich e_0 werden soll, so erhält man den Fall, daß die Bahn eine Gerade wird; als Stationaritätsbedingung erhält man aus (4), da die linke Seite $r_0 \omega_0^2 = v_0 \omega_0 = 0$ wird:

$$(5a) \quad v_0 = - \frac{e_0}{\hbar} = \left| \frac{\mathfrak{E}}{\hbar} \right|.$$

Wir haben dann Wiens Methode der kompensierten Strahlen vor uns.

3) Das ist der von Bartky und Dempster (a. a. O.) betrachtete Fall.

führen, die angibt, welcher Bruchteil der Zentrifugalkraft auf der Kreisbahn vom elektrischen Felde kompensiert wird:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e}{r_0} = y r_0 \omega_0^2 \\ \text{oder} \\ \frac{e}{r_0^2} = y \omega_0^2; \text{ aus (4): } \mathfrak{h} = (1-y) \omega_0; \text{ aus (3): } \frac{e}{r_0^2} = \frac{\omega_0}{2} (1+y). \end{array} \right.$$

Durch Elimination von ω_0 erhält man die Gleichung

$$\frac{y}{(1-y)^2} = \frac{e}{\mathfrak{h}^2 r_0^2},$$

aus der man ersieht, daß die linke Seite und damit die „Feldanordnung“ e , \mathfrak{h} , r_0 erhalten bleiben, wenn man y durch $\frac{1}{y}$ ersetzt.

2. Unsere erste Frage wird die nach der Fokussierung eines im Abstande r_0 mit der Geschwindigkeit v_0 ausgehenden divergenten Teilchenstrahls sein; die zu Anfang aus der Zeichenebene heraustretenden Teilchen bleiben dabei divergent, während die in der Zeichenebene unter einem kleinen Winkel α gegen die Kreistangente abgeschossenen Teilchen den stationären Kreis wieder schneiden. Um den Winkel, nach dem die Fokussierung eintritt, zu berechnen, eliminieren wir zunächst ω aus (2) und (3) und erhalten

$$(8) \quad \ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{e}{r} - \frac{1}{4} \mathfrak{h}^2 r.$$

Entwickeln wir nach α

$$(9) \quad r = r_0 + \alpha r_1 + \alpha^2 r_2; \quad \omega = \omega_0 + \alpha \omega_1 + \alpha^2 \omega_2,$$

so erhalten wir unter Berücksichtigung nur der linearen Glieder in α :

$$(10) \quad \ddot{r}_1 = \frac{c}{r_0^4} \cdot 3 r_1 + \frac{e}{r_0^2} r_1 - \frac{1}{4} \mathfrak{h}^2 r_1.$$

Führen wir hierin (7) ein, so wird die Differentialgleichung

$$\ddot{r}_1 = -(1+y^2) \omega_0^2 r_1$$

mit der Lösung

$$(11) \quad r_1 = \frac{r_0}{\sqrt{1+y^2}} \sin \sqrt{1+y^2} \omega_0 t$$

bei den Anfangsbedingungen $r_1 = 0$ und $\dot{r}_1 = \alpha \dot{r}_1 = \alpha r_0 \omega_0$ für $t = 0$. Wir erhalten nach (11) Fokussierung ($r_1 = 0$) für $t = \frac{\pi}{\sqrt{1+y^2} \omega_0}$ oder, da $\varphi = \omega_0 t$ bis auf Glieder in α , nach einem Winkel

$$(12) \quad \varphi = \Phi = \frac{\pi}{\sqrt{1+y^2}}.$$

In diesem Ergebnis sind die bekannten Fälle der Fokussierung im Magnetfeld ($y = 0$; $\Phi = \pi$), im elektrischen Feld ($y = 1$; $\Phi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$) und im speziell kombinierten elektrischen und magnetischen Feld [Gl. (6): $y = -1$, $\Phi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$] enthalten; schließlich tritt für den in Gl. (5a) erwähnten gerad-

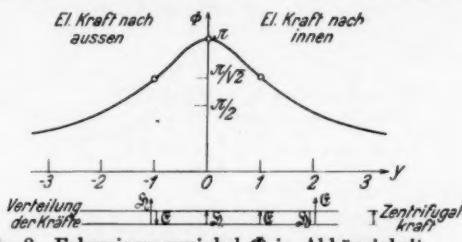


Fig. 2. Fokussierungswinkel Φ in Abhängigkeit von der Feldkombination y

linigen Fall ($y = \pm \infty$) die Fokussierung nach einem Wege $l = r_0 \Phi = \pi \frac{r_0}{|y|} = \pi \left| \frac{m}{e} \frac{E}{B^2} \right|$ ein. Fig. 2 stellt Φ als Funktion von y dar.

3. Um ein Maß für die Güte der Fokussierung zu haben, berechnen wir die natürliche Strichbreite, also den Wert von r an der Stelle Φ bei Berücksichtigung der Glieder in α^2 .

Dazu hat man noch in (10) $c = c_0 + \alpha^2 c_2$ zu setzen und hat aus (3):

$$c_0 = + \frac{r_0^2 \omega_0}{2} (1 + y); \quad c_2 = - \frac{r_0^2 \omega_0}{2}.$$

Aus (7), (8), (9) erhält man dann

$$\ddot{r}_2 = - (1 + y^2) \omega_0^2 r_2 + \frac{1}{r_0} \left[\frac{3}{2} (1 + y)^2 - y \right] \omega_0^2 r_1^2 - \frac{r_0 \omega_0^3}{2} (1 + y)$$

oder mit (11)

$$\ddot{r}_2 = - (1 + y^2) \cdot \omega_0^2 r_2 + \left[\frac{3}{2} (1 + y)^2 - y \right] \frac{r_0 \omega_0^2}{1 + y^2} \sin^2 \sqrt{1 + y^2} \omega_0 t - \frac{r_0 \omega_0^3}{2} (1 + y).$$

Die Lösung mit $r_2 = \dot{r}_2 = 0$ für $t = 0$ lautet

$$(13) \quad \begin{cases} r_2 = r_0 \cdot x (1 - \cos \sqrt{1 + y^2} \omega_0 t) + r_0 \cdot \lambda \sin^2 \sqrt{1 + y^2} \omega_0 t \\ \text{mit} \quad x = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + y^2)^2} \left(1 + \frac{5}{3} y + y^2 - y^3 \right) \\ \text{und} \quad \lambda = - \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + y^2)^2} \left(1 + \frac{4}{3} y + y^2 \right). \end{cases}$$

Um hieraus r bis zu Gliedern mit α^2 genau zu bekommen, müssen wir t für den durch (12) gegebenen Winkel φ bis auf Glieder in α kennen, um diesen Wert in r_1 einsetzen zu können. Aus (9), (7) und (3) erhält man sofort

oder mit (11) $r_0 \omega_1 = -(1+y) \omega_0 r_1$

$$\omega_1 = -\omega_0 \frac{1+y}{\sqrt{1+y^2}} \sin \sqrt{1+y^2} \omega_0 t.$$

Paraus wird

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \omega \, dt = \omega_0 t + \alpha \int \omega_1 \, dt \\ &= \omega_0 t + \alpha \frac{1+y}{1+y^2} (\cos \sqrt{1+y^2} \omega_0 t - 1) \end{aligned}$$

oder für $\varphi = \Phi$

$$(14) \quad t = T = \frac{\pi}{\sqrt{1 + y^2 \omega_0}} + 2 \frac{a}{\omega_0} \frac{1 + y}{1 + y^2} + \text{Glieder in } a^3.$$

Setzen wir schließlich

$$r = r_0 + B \quad \text{für} \quad q = \Phi,$$

wo also B die gesuchte Strichbreite ist, so wird aus (9), (11), (13) mit Benutzung von (14) bis auf Glieder mit α^3

Es ergeben sich als Spezialfälle die bekannten Resultate

$$\begin{aligned}
 B &= -\alpha^2 r_0 && \text{für reines Magnetfeld} && (y = 0), \\
 &= -\frac{4}{3} \alpha^2 r_0 && \text{, , , elektr. Feld} && (y = 1), \\
 &= 3 \alpha^2 \cdot \frac{r_0}{|1+u|} = \frac{3 v_0^2}{c} \alpha^2 && \text{, , die gerade Bahn} && (|y| = \infty),
 \end{aligned}$$

for more

$$B = \frac{1}{2} \alpha^2 r_0 \quad \text{„Kombination (Gl. 6) \quad (\gamma = -1).”}$$

Aus der Zusammenstellung sieht man, daß in dieser Näherung $B = 0$ wird zwischen $y = 0$ und -1 , und zwar liegt die Null-

stelle¹⁾ bei $y = -0,76$; hier ist die Fokussierungswirkung maximal. In Fig. 3 haben wir $\frac{1}{\alpha^2} \cdot B$ gestrichelt eingezeichnet.

Um zu untersuchen, wann man unsere Feldanordnung als Monochromator, wann als „achromatische Linse“ gebrauchen kann, fragen wir nach der Auflösung in v . Dazu nehmen wir

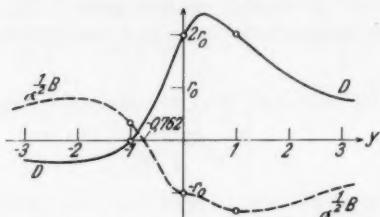


Fig. 3. Dispersion D und Strichbreite B in Abhängigkeit von y

an, das Teilchen fliege zu Anfang senkrecht zu den Feldlinien ($\alpha = 0$), aber mit der Geschwindigkeit $v = v_0 + dv$ ab. Setzen wir analog zu (9)

$$(16) \quad r = r_0 + r_1; \quad \omega = \omega_0 + \omega_1; \quad c = c_0 + c_1,$$

so haben wir für c_1 einerseits aus (3) für $t = 0$:

$$r_0 \omega_1 = -(1+y) \omega_0 r_1 + \frac{c_1}{r_0} = \frac{c_1}{r_0},$$

da $r_1 = 0$ für $t = 0$; andererseits aus dem „Pythagoras“

$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \omega^2$ für $t = 0$: $dv = r_0 \omega_1 + \omega_0 r_1 = r_0 \omega_1$,
also $c_1 = r_0 dv$. Gehen wir mit (16) und dem Wert für c_1 in (8) ein, so wird

$$\ddot{r}_1 = -(1+y^2) \omega_0^2 \cdot r_1 + (1+y) \omega_0 dv$$

und daraus

$$r_1 = r_0 \frac{dv}{v_0} \frac{1+y}{1+y^2} (1 - \cos \sqrt{1+y^2} \omega_0 t).$$

Definieren wir nun die Auflösung D so, daß $r = r_0 + D \frac{dv}{v_0}$

wird für $\varphi = \Phi$, d. h. für $t = \frac{\pi}{\sqrt{1+y^2} \omega_0}$, so wird

$$(17) \quad D = 2r_0 \frac{1+y}{1+y^2}.$$

1) Tatsächlich kann man aus (15) nur schließen, daß B von der Form sein muß:

$$B = b_0(y) \alpha^2 + b_1(y) \alpha^3 + b_2(y) \cdot \alpha^4 + \dots,$$

wo zwar $b_0 = 0$ ist für $y = -0,76$, wo $b_1, b_2 \dots$ jedoch endlich sein können. Eine etwas langwierige Rechnung ergibt $b_1(-0,76) = -r_0$.

Falls $y = -1$, d. h. Gl. (6) erfüllt ist, wird $D = 0$; es werden dann nicht nur die Teilchen wenig verschiedener Richtungen, sondern auch wenig verschiedener Geschwindigkeit fokussiert¹⁾, d. h. die Apparatur ist „chromatisch korrigiert“. Wir werden auf diesen Fall der Fokussierung nach Richtung *und* Geschwindigkeit noch zu sprechen kommen. Fig. 3 gibt D in Abhängigkeit von y wieder (ausgezogene Linie). — Da die Auflösung sich andererseits nur dann bemerkbar macht, wenn

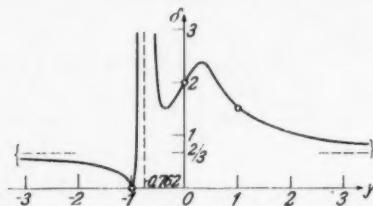


Fig. 4. Reduzierte Auflösung $\delta = \left| \frac{D}{B} \right| \alpha^2$ als Funktion von y

sie die natürliche Strichbreite B überwiegt, ist es vorteilhaft, die reduzierte Auflösung $\delta = \left| \frac{D}{B} \right| \alpha^2$ zu betrachten; sie wird nach (15) und (17)

$$(18) \quad \delta = 2 \left| \frac{1 + y + y^2 + y^3}{1 + \frac{1}{2}y + y^2 + 3y^3} \right|.$$

Wir haben δ in Fig. 4 aufgetragen und finden gute Dispersion bei $y = 0,35$; bei $y = -0,76$ verläuft δ sogar wie $\text{const} \cdot 1/y$ (vgl. S. 341, Anm. 1).

4. Die im Falle eines nach außen gerichteten elektrischen Feldes [wobei zwischen e , \hbar , r_0 die Gl. (6) bestehen muß] erreichbare Fokussierung eines Strahls geladener Teilchen sowohl nach Richtung als nach Geschwindigkeit legt die Frage nahe, wie gut sich diese Anordnung zum Massenspektrographen eignen könnte. Dabei zeigt sich, daß bei Veränderung der Masse m um dm bei sonst festgehaltener „Feldanordnung“ r_0 , E , \hbar zwar nicht in jedem Falle eine stationäre Kreisbahn existiert, daß aber die benachbarten Massen $m + dm$ ebenfalls doppelt fokussiert werden.

1) Man sieht aus der Gleichung für r_1 sofort, daß die Dispersion im Fokussierungspunkt $\varphi = \Phi$ maximal ist, außer für $y = -1$, wo Teilchen verschiedener Geschwindigkeiten in 1. Näherung überhaupt gleiche Bahnen beschreiben. Diese Erscheinung hängt damit zusammen, daß in diesem Falle die beiden Wurzeln ω_0 der Gl. (5) zusammenfallen.

Die übliche Rechnung, bei der wir beachten müssen, daß nach (1) bei festgehaltenen Feldern die Größen e und \hbar sich ändern, sobald wir die Masse der Teilchen verändern, liefert jetzt für $y = -1$

$$\ddot{r}_1 = -2\omega_0^2 r_1 + \frac{dm}{m} r_0 \omega_0^2$$

und

$$(19) \quad r_1 = \frac{dm}{m} \frac{r_0}{2} (1 - \cos \sqrt{2}\omega_0 t) + \alpha r_0 \frac{\sin \sqrt{2}\omega_0 t}{\sqrt{2}} + 0 \cdot dv.$$

An der Fokussierungsstelle ist in 0. Näherung $\sqrt{2}\omega_0 t = \pi$, also

$$(20) \quad r_1 = \frac{dm}{m} r_0.$$

Die Glieder in α^2 und dv^2 können wir durch geeignete Ausblendung des Primärstrahles klein machen; die Massenauflösung könnte aber verschlechtert werden durch Glieder in αdm oder $dv dm$, da ja dm von uns nicht variiert werden kann. Nun sieht man aus (19), daß dort der Faktor von dm/m keinen von uns gesuchten Beitrag liefern kann, da eine auf t angewandte Korrektur mit t^2 , also mit α^2 oder dv^2 geht; wir brauchen uns also nur um die Abhängigkeit der Fokussierungszeit von der Massenänderung dm zu kümmern. Aus (3) folgt jedoch

$$r_0 \omega_1 = -(1 + y) r_1; \quad \text{mithin } \omega_1 = 0 \quad \text{für } y = -1;$$

d. h. aber, ω und damit φ und t sind in 1. Näherung von dm unabhängig, also kann auch das zweite Glied in (19) keinen Beitrag in αdm liefern.

Die angegebene Anordnung ist zur Spektrographie gut geeignet, weil sie außer der Richtungs- und Geschwindigkeitsfokussierung von Haupt- und Nebenstrahlen (Masse m bzw. $m + dm$) auch eine in 1. Näherung *lineare* Massenskala aufweist, die sehr einfach mit den geometrischen Größen des Apparates zusammenhängt (Gl. 20). Die Massen werden in einer Ebene fokussiert, die durch die Achse des Systems geht und mit dem Radiusvektor des Abschlußpunktes den Winkel $\varPhi = 127^\circ$ bildet.

5. Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß sich durch geeignete Kombination eines homogenen Magnetfeldes und des elektrischen Feldes eines Zylinderkondensators divergierende Elektronenstrahlen nach Durchlaufen eines beliebigen Kreisbogens \varPhi fokussieren

lassen ($\Phi < 180^\circ$), (§ 2). Für alle Anordnungen wird die Strichbreite und Geschwindigkeitsdispersion angegeben (§ 3). Diese verschwindet in einem bereits von Bartky und Dempster behandelten Fall; jene in einem anderen, bisher unbeachteten Fall, in dem also die Dispersion besonders gut ausgenutzt werden kann. Die Möglichkeit der Verwendung der Apparatur zur Massenspektrographie wird erörtert (§ 4). — Die Fälle der Fokussierung im reinen Magnetfeld, im rein elektrischen Feld sowie Wiens Methode der kompensierten Strahlen sind ebenfalls als Spezialfälle in unseren Rechnungen enthalten.

Vorliegende Untersuchung wurde als Beitrag einer zusammenfassenden Darstellung der geometrischen Elektronenoptik durchgeführt, an der zur Zeit im Forschungs-Institut gearbeitet wird.

Berlin-Reinickendorf, November 1933.

(Eingegangen 30. November 1933)